En analyse av to argumenter for Guds eksistens fremlagt av C.G. Small

av

Morten Harboe Rognes

2009

© Morten Harboe Rognes

§1 Innledning

I dette arbeidet skal vi hovedsakelig studere to argumenter for Guds eksistens. Begge bevisene er inspirert av et argument som Gödel i 1970 viste til Dana Scott. Gødel publiserte selv aldri dette argumentet. Det er notatene i Gödels håndskrift og notatene til Dana Scott som er de primære kildene for Gödels eget argument. Imidlertid skal vi ikke her vurdere Gödels opprinnelige tankegang slik den ble fremlagt av Scott. Vi skal i stedet se på to versjoner av argumentasjonen som fremlegges av C. G. Small. Det ene av disse argumentene er fremlagt i Small [4]. Det andre, som er en variant av det første, og som etter Smalls mening avspeiler Gødels tankegang bedre, er fremlagt i Small [4]. I resten av dette skrift holder vi Gödels navn utenfor siden vi ikke har hatt noen anledning, eller mulighet, til å vurdere hvorvidt de argumenter som Small legger frem virkelig representerer en troverdig intepretasjon av Gödels opprinnelige tankegang. Vi skal utelukkende forholde oss til de argumenter Small fremstiller, og vi tillater oss å kalle dem for henholdsvis Smalls første og andre argument. Man kan altså ikke fra vår vurdering av Smalls argumenter slutte noe direkte om hva vi måte mene om Gödels opprinnelige tankegang.

Gödels argument for Guds eksistens er en ganske sofistikert variant av det ontologiske argument som opprinnelig ble fremlagt i middelalderen av Anselm av Canterbury. Vi skal likevel ikke begi oss inn på den idéhistoriske bakgrunnen for argumentet. Heller ikke skal det skrives noe om den virkningshistorie argumentet har hatt gjennom tidene. I denne forbindelse har vi intet nytt å tilføye. Når det gjelder dette henviser vi til Small [2] og [3] som beskriver den idéhistoriske bakgrunn og som også tar med en del av den kritikk som har blitt rettet mot argumentet. Heller ikke skal vi drøfte nyere versjoner av det ontologiske argument som har blitt fremlagt av Platinga, Malcolm, Hartshorne og andre. En ganske grundig oversikt over forskjellige versjoner av det ontologiske argument er forøvrig gitt i Oppy [1]. Vi henviser de lesere som er interessert til denne artikkelen.

I dette skrift skal vi hovedsakelig gjøre det følgende: For det første ønsker vi å gi en fullstendig formalisert og presis fremstilling av de argumentene som Small fremstiller. For dette formål er det nødvendig å gi en nøyaktig fremstilling av et system for høyre ordens modallogikk. Systemet betegnes med S5*. I det vesentlige dreier det seg om en predikatlogisk versjon av modalsystemet S5 utvidet med predikatvariabler og konstanter av første og andre orden. Predikatvariabelene av første orden tar egenskaper som verdier, de av andre orden tar som verdier egenskaper ved egenskaper. Aksiomene og slutningreglene må dessuten forøkes fra den enklere predikatlogiske versjonen slik at man tar hensyn til de nye predikatvariablene og konstantene som man har inkludert i språket. Vi formuler så premissene og konklusjonen til Smalls første, såvel som hans andre, argument innenfor rammen av S5* og gir detaljerte bevis for at premissene i begge argumenter impliserer konklusjonen.

I tillegg til det som nettopp er nevnt angir vi også detaljert en semantisk teori for den typen språk for annen ordens modallogikk vi arbeider med her. Dessuten vises det at alle aksiomene i systemet S5* er gyldige i alle modeller og at slutningsreglene bevarer gyldighet.

Det er ingen helt opplagt sak at premissene i de to argumentene som Small presenterer er konsistente. Vi viser for begge argumenters del at det er mulig å spesifisere modeller hvor alle premissene er sanne. Dette kaster et visst lys over hva argumentene i en viss forstand

© Morten Harboe Rognes

sier. Dessuten viser vi for det første argumentets vedkommende en sats som angir en nødvendig, såvel som tilstrekkelig, betingelse for at en modell oppfyller premissene i argumentet.

La oss gi en mer systematisk oversikt over innholdet i de enkelte paragrafer i dette skrift. I det neste avsnittet, §2, gir vi en detaljert definisjon av språket L til kalkylen S5*. I §3 definerer vi så hva som menes med en modell for dette språket og hva som skal til for at en formel i språket skal være gyldig i alle modeller. I det påfølgende avsnitt, §4, gir vi en detaljert definisjon av modalsystemet S5*, og angir de aksiomskjemaene og slutningsreglene som inngår i det. Dessuten viser vi at alle aksiomene er gyldige og at de slutningsreglene som inngår i systemet bevarer gyldighet.

I §5 viser vi hvordan Smalls første argument kan formaliseres innenfor den språkrammen vi har satt opp. Dessuten viser vi i detalj hvordan kondisjonalen som har konjunksjonen av premissene som antesedent og konklusjonen som konsekvent kan vises å være et teorem i S5*. I §6 gir vi så en semantisk analyse av argumentet. I den første halvdelen av denne paragrafen viser vi hvordan premissene, såvel som konklusjonen kan oversettes i semantiske termer. Dette kaster et visst lys over hva disse premissene sier. Dernest viser vi i detalj at de semantiske korrelatene til premissene impliserer det semantiske korrelatet til konklujonen. Vi gir altså, sagt på en annen måte, et semantisk bevis for det første argumentet. I den andre halvdelen angir vi forskjellige krav som en modell må tilfredstille for å oppfylle premissene i Smalls argument og viser at disse kravene er ekvivalente. Endelig viser vi også endel satser av relevans for en vurdering av argumentet. For det første vises det at dersom man beholder den definisjonen av guddommelig vesen som gis som fjerde premiss i argumentet er det logisk umulig at det kan finnes guddommelige vesener dersom to uforenelige attributter begge er positive. For det andre viser vi den samme konklusjon kan oppnås om mengden av positive egenskaper ikke er lukket under implikasjon eller dersom man ikke oppfatter den universelle egenskap som en positiv egenskap. I §6.1 gir vi en detaljert, kritisk diskusjon av argumentet. Vi viser dessuten at to av premissene i det første argumentet er overflødige.

I §7 tar vi for oss det andre argumentet til Small, fomaliserer det, og viser at konklusjonen er implisert av premissene innenfor rammen av S5*. Det andre argumentet er mer komplisert enn det første. Det inneholder blandt annet en premiss som sier at for enhver egenskap har man at enten egenskapen selv, eller negasjonen av den, er er en positiv egenskap. La oss kalle denne premissen for fullstendighetspremissen. Dessuten er premissene som karakteriserer egenskapen å være et guddommelig vesen av en annen karakter enn i det første argumentet. I §7.1 gir vi en semantisk analyse av det andre argumentet og i den etterfølgende paragrafen viser vi at fullstendighetspremissen er overflødig. Fjerner man denne får man et argument som semantisk sett er helt ekvivalent med det første. I §8 studerer vi nærmere hva fullstendighetspremissen innbærer. En mengde med egenskaper X kalles for fullstendig dersom den oppfyller de følgende krav: For det første kan ikke en egenskap og negasjonen av denne egenskap begge være med i mengden X. Den må med andre ord være konsistent. For det andre må en egenskap være med i X dersom den er implisert av en egenskap som er med i X. For det tredje må enhver egenskap som er snittet av enhver ikke-tom delmengde av X være med i mengden. Endelig det være slik for enhver egenskap at enten den selv eller dens negasjon er med i mengden X.

Det er ingen opplagt sak at det finnes fullstendige egenskapsmengder i denne forstand. Vi viser at dette er tilfelle og også hvordan man kan konstruere slike mengder. Det vesentlige er imidlertid det følgende. Er X en slik fullstendig egenskapsmengde viser det seg at den egenskapen som er snittet av alle egenskapene i X er en egenskap hvis ekstensjon er tom i alle

© Morten Harboe Rognes

verdener untatt en, og at dens ekstensjon i denne ene verden alltid er en enhetsmengde. Dette har fatale konsekvenser for det andre argumentet til Small dersom man tar med fullstendighetspremissen, og definerer, slik det gjøres, et guddommelig vesen som et som har alle gode egenskaper. Da vil det nemlig følge at egenskapen å være et guddommelig vesen har en ekstensjon som er tom i alle verdener untatt en. Føyer man derfor til andre premisser som innebærer at et guddommelig vesen må ha nødvendig eksistens dersom det eksisterer - dette gjøres i det andre argumentet- er en konsekvens at det bare kan finnes en eneste logisk mulig verden. Dette innebærer i sin tur at enhver mulig sannhet er en nødvendig sannhet og dermed en sannhet. Kort sagt blir det umulig å foreta noen modale distinksjoner. Det er derfor helt nødvendig i Smalls andre argument å fjerne fullstendighetspremissen.

Den siste paragrafen inneholder en kort oppsummering og noen avsluttende bemerkninger.

§2 Språket til det modallogiske systemet S5* av andre orden.

Vi skal formalisere de gudsbevisene som blir fremstilt av Small innenfor et modallogisk språk L av annen orden.

Det er hensiktsmessig å avgrense denne klassen av språk nøyaktig. Vokabularet til et modallogisk språk L av annen orden inneholder variabler og konstanter av tre forskjellige typer: (a) For det første inneholder L en tellbart uendelig mengde med individvariabler, eller variabeltegn av type 0: Dette er de følgende konkrete uttrykk: x, y , z, w, x', y', z', w', x'', y'', ... I tillegg inneholder L en mengde med individkonstanter, eller konstanter av type 0, som eventuelt kan være tom. Disse individkonstantene er c, c', c'', osv.

Ved siden av individvariablene og individkonstantene inneholder vokabularet til språket L predikatvariabler og predikatkonstanter av type 1 og 2. (b) Predikatvariablene av type 1 i L er en tellbart uendelig mengde med tegn og det dreier seg om tegnene i den følgende rekke:
f, g, h, f', g', h', ... Mengden av predikatkonstanter i L, som kan være tom, utgjøres av tegn hentet fra den følgende rekke: f;0, f;1, f;2, f;3 ... osv. om det ikke eksplisitt fastsettes noe annet. (c) Endelig inneholder vokaubularet til en tellbart uendelig mengde med predikatvariabler av type 2 og en eventuelt tom mengde med predikatkonstanter av type 2. Predikatvariablene av type 2 er uttrykkene i den følgende rekke: F, G, H, F', G', H', ... Predikatkonstantene av type 2 i L, vil være, om ikke noe annet eksplisitt sies, tegn som er hentet fra den følgende rekke av uttrykk: F;0, F;1, F;2, ...

Vokabularet til et modallogisk språk L av annen orden inneholder også vise andre tegn, nemlig de logiske konnektivene og konstantene. De *utsagnslogiske konnektivene* i språket er de følgende to konnektiver, nemlig $\neg$ og $\rightarrow$. Det første konnektivet representerer negasjon, det andre konnektivet står for materiell implikasjon. De andre setningslogiske konnektivene, & for konjunksjon, v for disjunksjon og $\leftrightarrow$ som står for materiell ekvivalens, defineres ved hjelp av $\neg$ og $\rightarrow$ på vanlig måte:

$(\alpha \text{ v } \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha) \rightarrow \beta$
$(\alpha \,\&\, \beta) \leftrightarrow \neg((\neg\alpha) \text{ v } (\neg\beta))$
$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \rightarrow \alpha)$

Ved siden av de utsagnslogiske konnektivene i et modallogisk språk L av annen orden inneholder vokabularet til L allkvantoren. Denne betegner vi med "A". Eksistenskvantoren, E, defineres ved hjelp av allkvantoren og negasjon på vanlig måte:

© Morten Harboe Rognes

$$(E\xi)\alpha \leftrightarrow \neg(A\xi)\neg\alpha$$

Vi inkluderer også identitetspredikatet = som et primitivt tegn i det vi her oppfatter dette som et konnektiv. Endelig inneholder et modallogisk språk L av annen orden også det følgende konnektiv, nemlig nødvendighetsoperatoren Nec. Mulighetsoperatoren Pos defineres så ved hjelp av denne nødvendighetsoperatoren på den følgende måte:

$$Pos(\alpha) \leftrightarrow \neg Nec(\neg\alpha)$$

Reglene for hvordan man danner velformer formler i et modallogisk språk av annen orden er de følgende: (1) Er γ en predikatvariabel, eller en predikatkonstant, av type 1 og er ξ enten en individvariabel, eller en konstant, av type 0 er $\gamma(\xi)$ en velformet formel. (2) Er γ en predikatvariabel, eller en predikatkonstant, av type 2 og er ξ en predikatvariabel, eller en predikatkonstant, av type 1 er $\gamma(\xi)$ en velformet formel. (3) Er ξ en individvariabel eller konstant av type 0, og er ξ' enten også enten en variabel eller konstant av type 0, er $\xi=\xi'$ en velformet formel. (4) Er ξ en predikalvariabel eller konstant av type 1, og er ξ' enten en variabel eller konstant av samme type, er $\xi=\xi'$ en velformet formel. (5) Er ξ en individvariabel eller konstant av type 2, og er ξ' enten en variabel eller en konstant av samme type, er $\xi=\xi'$ en velformet formel.

De formlene som er dannet ved reglene (1) - (5) kalles for atomære formler. Reglene for hvordan man danner sammensatte formler på grunnlag av de atomære formlene ved hjelp av de logiske konnektivene er de følgende: (6) Er α og β to velformede formler er $(\neg\alpha)$, $Nec(\alpha)$ og $(\alpha\rightarrow\beta)$ også velformede formler. (7) Er ξ enten en individvariabel, en predikatvariabel av type 1 eller en predikatvariabel av type 2, og er α en velformet formel, er også $(A\xi)\alpha$ en velformet formel.

Mengden av de velformede formlene i L er altså den minste mengden med formler i L som oppfyller kravene (1) - (7). Dermed har vi avgrenset presist den klassen av språk L som vi her arbeider med.

En variabel ξ sies å forekomme fri i en formel α hvis og bare hvis den forekommer i α og den ikke forekommer i noen delformel av α av typen $(A\xi)\beta$. Er ξ en variabel som forekommer fri i α sies den å være fri for variabelen υ i α hvis og bare hvis ξ ikke forkommer innenfor området til noen kvantor av typen $(A\upsilon)$ i α. I denne forbindelse kreves det naturligvis at variablene ξ og υ er av samme type. Resultatet av å erstatte alle fri forekomster av variabelen ξ i α med υ der υ enten er en variabel eller konstant av samme type som ξ betegnes med $\alpha;\xi[\upsilon]$.

La oss tilslutt gjøre oppmerksom på at dersom L er et modallogisk språk av annen orden betegner Fm(L) mengden av formler i L. Vi bruker CFm(L) for å betegne mengden av alle lukkede formler i L.

§3 Modellteori for S5*.

Semantiske overveielser spiller en viktig rolle i forbindelse med våre betraktninger over argumentene for Guds eksistens som fremlegges av Small. Vi skal derfor i dette avsnitt fremstille helt detaljert en modellteori for modallogiske språk L av annen orden.

Imidlertid bemerker vi det følgende før vi går videre: Anta X og Y er to vilkårlige mengder. Da betegner vi mengden av alle de funksjoner f, der domenet til f er mengden Y og hvor verdiområdet til f er inkludert i mengden X med X^Y. Med andre ord er X^Y mengden av funksjoner som går fra X inn i Y. Formelt kan X^Y defineres slik:

© Morten Harboe Rognes

Definisjon 3.1 La X,Y være mengder. Da setter vi:
X^Y = Mg(f: Func(f) & Dom(f) = X & Rgn(f) Inkl X)

Vi kan nå gå over til fremstillingen av modellteorien for modalogiske språk L av annen orden. Først defineres hva som menes med en modell for et slikt språk:

Definisjon 3.2 Anta L er et modallogisk språk av annen orden. Med en modell M for L forstås da et triple <D, I, V> der D og I er ikke-tomme mengder og hvor V er en funksjon som oppfyller de følgende krav: (i) V tilordner enhver individkonstant i L et element i D. (ii) V tilordner enhver predikatkonstant av type 1 i L en funksjon i mengden D^I. (iii) V tilordner enhver predikatkonstant av type 2 en funksjon i mengden (D^I)^I

Er M= <D,I,V> en modell for L kaller vi elementene i D for individene i modellen. Elementene i I kaller vi for de mulige verdenene i modellen M. Elementene i D^I kaller vi for egenskapene av type 1, eller rett og slett egenskapene, i M. Elementene i (D^I)^I kaller vi for egnskapene av annen orden i modellen. Anta nå at fê(D^I). Da er altså f en egenskap i M. Er wêI kaller vi f(w), som åpenbart vil være en mengde av individer, for ekstensjonen til f i verdenen w. Tilsvarende om f er en egenskap av annen orden i modellen. Da har vi at fê((D^I)^I). Ekstensjonen til f i verdenen w vil da være f(w). Som man umidellbart ser vi dette være en mengde, ikke av individer, men av egenskaper.

La nå M=<D,I,V> være en modell for det modalogiske språket L av annen orden. Da vil vi med "L(M)" betegne det språket vi får når L utvides tre nye mengder av konstanter, nemlig navn på alle individene i D, videre en mengde med navn på alle egenskapene i D^I, og endelig en mengde med navn på alle egenskapene av annen orden, nemlig ((D^I)^I). Vi skal betegne mengden med navn på elementene i D med Navn(D). Tilsvarende betegner Navn(D^I) mengden av navn på elementene i D^I og Navn((D^I)^I) navnene på alle elementene i (D^I)^I. I det følgende skal vi bruke i, i', i" etc. for navn på individer. j, j', j" etc. brukes som navn på egenskaper. Endelig bruker vi k, k', k" etc. som navn på egenskaper av annen orden. Er x et eller annet navn, hva enten det er et navn på et individ, en egenskap eller en egenskap av annen orden, betegner n;-1(x) det objektet x er navn på. Er x et objekt, dvs. enten et individ, en egenskap eller en egenskap av annen orden, betegner n(x) det navnet som betegner x. Denne navngivningsfunksjonen n krever vi at skal være en-entydig. Videre vil vi betrakte den gitt sammen med de tre kategoriene av navn som vi har innført. Er derfor M en modell for L betrakter vi altså Navn(D), Navn(D^I) og Navn((D^I)^I) samt funksjonen n som gitt.

I det følgende skal vi omtale enhver individkonstant, ethvert navn på et individ, enhver predikatkonstant av type 1, ethvert navn på en egenskap, enhver predikatkonstant av type 2 og ethvert navn på en egenskap av annen orden i L(M) for en term i L(M). Er t;1 og t;2 to termer i L sies de å ha *samme type* om vi enten (1) har at t;i (i=1,2) er en individkonstant eller et navn på et individ, eller (2) har at t;i (i=1,2) er en predikat konstant av type 1 eller et navn på en egenskap, eller (3) har at t;i (i=1,2) er en predikatkonstant av type 2 eller et navn på en egenskap av annen orden.

Anta M er en modell for L. Anta t er en term i L(M). Anta t enten en individkonstant eller et navn på et individ i L(M). Da er referansen til t i M det objektet som t er et navn på om t er et navn eller V(t) om t er en individkonstant. Anta t enten en predikatkonstant av type

© Morten Harboe Rognes

1 eller et navn på en egenskap i L(M). Da er referansen til t i M det objektet som t er et navn på om t er et navn eller V(t) om t er en predikatkonstant. Anta tilslutt at t enten en predikatkonstant av type 2 eller et navn på en egenskap av annen orden i L(M). Da er referansen til t i M det objektet som t er et navn på om t er et navn eller V(t) om t er en predikatkonstant av type 2. Er t en term i L(M) betegner Ref;M(t) referansen til t i M.

Vår neste oppgave er å definere, gitt et modallogisk språk L av annen orden og en modell M for L, hva som menes med at en lukket formel α i L(M) er sann i verdenen w i modellen M. Vi bruker "(M,w) ⊨ α" som forkortelse for " formelen α er sann i verdenen w i modellen M". Definisjonen er ved induksjon på lengden av formler i L:

Definsjon 3.3 Anta L er et modallogisk språk av annen orden og at M= <D,I,V> er en modell for L. Da er (M,w) ⊨ α , der αêCFm(L(M)) og wêI, definert induktivt på lengden av formler α på den følgende måte:

(i) Anta α er en atomær formel av typen ξ(η) der (1) ξ enten er en predikatkonstant av type 1 eller et navn på en egenskap i L(M) og (2) η er en individkonstant eller et navn på et individ i L(M). Da setter vi:

(M,w) ⊨ ξ(η) ↔ φ(η)ê φ(ξ)(w)

der (1) φ(η) er det objektet η er navn på om η er et individnavn, eller V(η) om η er en individkonstant i L og (2) φ(ξ) er den egenskapen som ξ er navn på om ξ er et navn på en egenskap eller V(ξ) om ξ er en predikatkonstant av type 1.

(ii) Anta α er en atomær formel av typen ξ(η) der (1) ξ enten er en predikatkonstant av type 2 eller et navn på en egenskap av annen orden i L(M) og (2) η er en predikatkonstant av type 1 eller et navn på en egenskap i L(M). Da setter vi:

(M,w) ⊨ ξ(η) ↔ φ(η)ê φ(ξ)(w)

der (1) φ(η) er det objektet η er navn på om η er et navn på en egenskap, eller V(η) om η er en predikatkonstant av type 1 i L og (2) φ(ξ) er den egenskapen av annen orden som ξ er navn på om ξ er et navn på en egenskap av annen orden eller V(ξ) om ξ er en predikatkonstant av
type 2.

(iii) Anta α er en atomær formel av typen ξ = η der ξ og η enten er to termer i L(M) av samme type. Da setter vi:

(M,w) ⊨ ξ=η ↔ Ref;M(ξ) = Ref;M(η)

(iv) Anta α er en formel av typen ¬β. Da setter vi:

(M,w) ⊨ ¬β ↔ ¬((M,w) ⊨ β)

(v) Anta α er en formel av typen β→γ Da setter vi:

(M,w) ⊨ (β→γ) ↔ ((M,w) ⊨ β → (M,w) ⊨ γ)

(v) Anta α er en formel av typen Nec(β). Da setter vi:

(M,w) ⊨ Nec(β) ↔ (Aw)(wêI → (M,w) ⊨ β)

(vi) (a) Anta α er en formel av typen (Aξ)α der ξ en individvariabel. Da setter vi:

(M,w) ⊨ (Aξ)α ↔ (Ax)(xêD → (M,w) ⊨ α;ξ[n(x)]

(b) Anta α er en formel av typen (Aξ)α der ξ en predikatvariabel av type 1. Da setter vi:

(M,w) ⊨ (Aξ)α ↔ (Ax)(xê(D^I) → (M,w) ⊨ α;ξ[n(x)]

(c) Anta α er en formel av typen (Aξ)α der ξ en predikatvariabel av type 2. Da setter vi:

(M,w) ⊨ (Aξ)α ↔ (Ax)(xê((D^I)^I) → (M,w) ⊨ α;ξ[n(x)]

© Morten Harboe Rognes

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av hva som menes med at en formel α i CFm(L(M)) er sann i verdenen w i modellen M. Vi sier at en lukket formel α i L er *gyldig* hvis og bare hvis vi har for enhver modell M=<D,I,V> for L at (Aw)(wêI → (M,w) ⊨ α).

Anta α er en vilkårlig formel i L. la ξ;1, ..., ξ;n være de variabelene som forekommer fri i α ordnet alfabetisk og slik at variablene med høyere type kommer før dem med lavere type. Da er den *universelle lukningen* av α formelen (Aξ;1)...(Aξ;n)α. Vi sier at en vilkårlig formel i α er gyldig hvis og bare hvis dn universelle lukningen av den er gyldig.

§4 Definisjon av kalkylen S5*. Aksiomskjemaene og slutningsreglene i kalkylen.

La L være et modallogisk språk av annen orden. Vi skal nå definere en bestemt kalkyle i L som vi vil betegne med S5*. Vi avgrenser denne kalkyle ved å angi aksiomskjemaene og de slutningsregler som inngår i den. Når det gjelder aksiomer kan disse nærmere bestemt inndeles i fem grupper. For det første har vi de rent *setningslogiske* aksiomer som inngår i kalkylen. Dette er alle instanser av de følgende skemaer:

U1 $\alpha \rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$
U2 $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha\rightarrow\beta)$
U3 $(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)) \rightarrow ((\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$

For det andre har vi de rent kvantifikasjonsteoretiske aksiomskjemaene. Dette er alle instanser av de følgende to skjemaer:

Q1 $(A\xi)(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \alpha\rightarrow (A\xi)\beta$
Q2 $(A\xi)\alpha \rightarrow \alpha;\xi[\eta]$

Vi bemerker at ξ i disse to skjemaene enten er en individvariabel, en predikatvariabel av type 1 eller en predikatvariabel av type 2. I forbindelse med skjemaet Q1 må det forutsettes at variabelen ξ ikke forekommer fri i α. Når det gjelder skjemaet Q2 står η enten for en variabel av samme type som variabelen ξ eller for en konstant av samme type. Dette innebærer at dersom for eksempel ξ er en predikatvariabel av type 2 må η enten være en predikatkonstant av type 2 eller en predikatvariabel av type 2. I tillegg til dette må man kreve at ξ er erstattbar med η i α. Dette innebærer at dersom man setter i η for alle fri forekomster av ξ i α blir ikke η bundet av noen kvantor som forekommer i α.

For det tredje inneholder kalkylen de følgende aksiomskjemaer som har med identitet å gjøre.

I1 $\xi;1 = \xi;2 \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$
I2 $\xi=\xi$
I3 $Nec((Ax)(f(x)\leftrightarrow g(x))) \rightarrow f=g$
I4 $Nec((Ax)(F(f)\leftrightarrow G(f))) \rightarrow F=G$

Når det gjelder skjemaene I1 og I2 forutsettes det at ξ, ξ;1 og ξ;2, på samme måte som ved de kvantifikasjonsteoretiske akiomene, enten er individvariabler, predikatvariabler av type 1 eller predikatvariabler av type 2. I tillegg må variabene ξ;1 og ξ;2 være variabler av samme type i I1. I forbindelse med dette skjemaet må det også forutsettes at α' er som α bortsett eventuelt ved å ha en fri forekomst av ξ;2 på et eller flere av de steder hvor α har en fri forekomst av ξ;1. Akiomet I3 sier at dersom to predikater av type 1 har samme ekstensjon i alle verdener så er de identiske. I4 sier det samme bortsett fra at det her dreier seg om predikater av type 2.

© Morten Harboe Rognes

Kondisjonalene i I3 og I4 holder også mot venstre i kraft av I1 og det forhold at Nec((Ax)(f(x)↔ f(x))) og Nec((Ax)(F(x)↔ F(x))) er utledbare i kalkylen.

De følgende to aksiomskjemaer kan kalles for komprehensjonsskjemaer. Er α en vikårlig formel vil det alltid finnes en egenskap av type 1 som i hver verden har samme ekstensjon som α. Det samme gjelder egenskaper av type 2.

C1 (Ef) Nec((Ax)(f(x) ↔ α)
C2 (EF) Nec((Af)(F(f) ↔ α)

Den siste gruppen av aksiomskjemaer i kalkylen er de følgende. Man kan kalle dem for aksiomskjemaene vedrørende modaloperatoren Nec.

M1 (Aξ)Nec(α) ↔ Nec((Aξ)α)
M2 Nec(α)→ α
M3 Nec(α→β) →. Nec(α) →Nec(β)
M4 Nec(α) → Nec(Nec(α))
M5 Pos(Nec(α)) → Nec(α)

Som man ser er M2 - M5 et vanlig standardsett av aksiomskjemaer for S5. De er åpenbart gyldige når man, slik som vi gjør her, tolker nødvendighet som sannhet i enhver mulig verden. Aksiomene M2 og M3 er dem som vanligvis assosieres med systemet T. Legger man til M4 får man systemet S4. Legger man så til M5 får man S5. M1 er den såkalte Barcan-formelen. Studerer man litt nærmere den sematiske teorien vi har fremlagt i forrige paragraf skulle det ikke være særlig vanskelig å se at denne formelen er gyldig.

Vi har nå sett på de aksiomskjemaene som vi vil inkludere i kalkylen S5*. Slutningsreglene i systemet er de følgende:

(R1) |- α → |-Nec(α)
(R2) |- α & |- (α→β) → |-β
(R3) |- α → |- (Aξ)α

Man ser at R1 er den vanlige nødvendighetsregelen som sier at dersom α er et teorem så er også Nec(α) et teorem. R2 er modus ponens: Er α og α→β teoremer så er også β et teorem. Endelig er R3 regelen om universell generalisering: Er α et teorem er også (Aξ)α et teorem. I denne regelen er ξ naturligvis enten en individvariabel, eller en predikatvariabel av type 1 eller type 2. Man har for eksempel at formelen f(x)→ G(x) v ¬G(x) er et teorem. Ved hjelp av R3 kan man da slutte, ikke bare at (Ax)(f(x)→ G(x) v ¬G(x)) er et teorem, men også at formlene
(AG)(f(x)→ G(x) v ¬G(x)) og (Af)(f(x)→ G(x) v ¬G(x)) er teoremer.

S5*-teoremene i L er den minste formelmengden i L som inneholder alle instanser av S5*- aksiomskjemaene vi har spesifisert ovenfor og som er lukket under slutningsreglene R1 - R3. En rekke av formler i L kalles for et S5*-bevis hvis og bare hvis vi har at enhver formel i denne rekken enten er en instans av et av aksiomskjemaene ovenfor eller er sluttet fra foregående formler i rekken ved hjelp av en av slutningsreglene R1 - R3. Er en formel α bevisbar i L skriver vi dette slik: S5* |- α. Vi bruker " ⊨α" for å uttrykke at α er gyldig i L. Man har at enhver formel som er bevisbar i S5* også er gyldig. Det er altså slik at den følgende sats holder:

Teorem 4.1 Er α en formel i L har man: S5*|-α → ⊨α

© Morten Harboe Rognes

Vi skal ikke gi noe detaljert bevis for dette, siden beviset blir svært langt om det gjennomføres detaljert, er temmelig trivielt og egentlig ikke kaster noe lys over det som er vårt hovedemne.

§5 Premissene og konklusjonen i Smalls første argument. Bevis for at premissene impliserer konklusjonen innenfor rammen av S5*.

Vi skal nå presentere det første argumentet til Small innenfor rammen av systemet S5*. Aller først må det bemerkes at vi utvider språket L med visse ikke-logiske konstanter.

For det første utvides L med en ny predikatkonstant av annen orden "Psv". Denne predikatkonstanten er det meningen at representerer egenskapen å være en positiv egenskap. Dette er altså en egenskap ved egenskaper, ikke ved individer. I tillegg innfører man to predikatkonstanter av første orden nemlig "Gu" og "NE". "Gu(x)" leses "x er et guddommelig vesen" og "NE(x)" leses "x har nødvendig eksistens". Dermed har vi presentert det språk som premissene og konklusjonen til Smalls argument kan formuleres i.

Den første premissen i Smalls argument kan formuleres slik i språket L utvidet med de nye konstantene vi har nevnt:

G1 $\quad \mathrm{Nec}[\ (Af)(\mathrm{Psv}(f) \rightarrow \mathrm{Nec}(\mathrm{Psv}(f))]$

Som man ser uttrykker denne formelen at det nødvendigvis er slik at dersom f er en positiv egenskap så er det nødvendig at f er en positiv egenskap. Dette innebærer at ekstensjonen til egenskapen Psv, egenskapen å være en positiv egenskap, er den samme i alle mulige verdener. Kaller vi de egenskaper hvor ekstensjonen er nøyaktig den samme i alle mulige verdener for *konstante* egenskaper innebærer G1 at egenskapen Psv er en konstant egenskap. Maan bør merke seg to forhold i denne forbindelse. Det første er at dersom man kan vise at ekstensjonen til en konstant egenskap er ikke-tom i en eller annen verden så kan man slutte at dens ekstensjon er ikke-tom i enhver verden. Det andre forhold er at G1 representerer et ikke-relativistisk syn på gode egenskaper. Premissen utelukker at en god egenskap, for eksempel vennlighet, kan være positiv i en mulig verden, men ikke-positiv i en helt annen verden. Man kan sympatisere med dette standpunkt.

Før vi presenterer den andre premissen i det første argumentet til Small gjør vi oppmerksom på at vi bruker uttrykket " f => g" som forkortelse for uttrykket "Nec((Ax)(f(x)→g(x)))". Denne betingelsen uttrykker at det er logisk nødvendig at dersom et eller annet individ har egenskapen f har det også egenskapen g. Dette innebærer semantisk sett at ekstensjonen til egenskapen f er inkludert i ekstensjonen til egenskapen g i enhver mulig verden. Har man at to egenskaper f og g oppfyller betingelsen "f => g" skal vi si at egenskapen f *impliserer* egenskapen g.

Den andre premissen til Small kan nå formuleres slik:

G2 $\quad \mathrm{Nec}[(Af)(Ag)(\mathrm{Psv}(f)\ \&\ f \Rightarrow g \ \rightarrow \mathrm{Psv}(g)]$

Man ser at G2 uttrykker at det nødvendigvis er tilfelle at enhver egenskap som er implisert av en positiv egenskap selv er positiv. Dette er naturligvis ingen direkte innlysende påstand, men ved første øyekast synes det i det minste å gi en viss mening.

La oss betrakte betingelsen Nec((Ax)(g(x) ↔ ¬f(x)). Betingelsen uttrykker at det er

© Morten Harboe Rognes

logisk nødvendig at et objekt har egenskapen g hvis og bare hvis det ikke har egenskapen f. Med andre ord vil egenskapen g være identisk med egenskapen ikke-f. Sagt på en annen måte uttrykker betingelsen at i enhver verden er det slik at et objekt er med i ekstensjonen til g hvs og bare hvis det ikke er med i ekstensjonen til f. Den tredje premissen som Small nevner sier at dersom f er en positiv egenskap kan ikke en egenskap g som representerer negasjonen av f, ie. egenskapen ikke-f være positiv. Premissen kan formuleres slik:

G3 $\quad Nec[(Af)(Psv(f) \rightarrow (Ag)(Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow \neg f(x))) \rightarrow \neg Psv(g))]$

Denne påstanden kan også ved første øyekast virke plausibel. I det minste like plausibel som premissen G2.

Når det gjelder den neste premissen bemerker vi først at dersom x er et individ og f er en egenskap, uttrykker Nec(f(x)) at x nødvendigvis har egenskapen f. f er med andre ord en egenskap x har i alle logisk mulige verdener. Av denne grunn uttrykker betingelsen $(Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Psv(f))$ at enhver nødvendig egenskap ved x er en positiv egenskap og omvendt. Kaller vi alle de egenskaper som nødvendigvis hefter seg ved en gjenstand for gjenstandens vesen kan man si at betingelsen $(Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Psv(f))$ uttrykker at individet x's vesen er identiske med mengden av alle positive egenskaper.

Den fjerde premissen i Smalls argument er:

G4 $\quad Nec[\ (Ax)(\ Gu(x) \leftrightarrow (Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Psv(f)))]$

Man ser at denne premissen kan oppfattes som en definisjon av Gu. Premissen uttrykker at det nødvendigvis er slik at noe x er et guddommelig vesen hvis og bare hvis x's vesen er identisk med mengden av alle positive egenskaper. Dette virker heller ikke direkte urimelig. Det kan oppfattes som et forsøk på å eksplisere den tanke at gud er et helt igjennom godt vesen.

I forlengelsen av denne tanke er det derfor naturlig å å tenke seg at egenskapen å være guddommelig, det vil si egenskapen Gu, selv er en positiv egenskap. Hvis man aksepterer en premiss som G4 synes det en smule merkelig om man benekter dette. At det å være et vesen er en positiv egenskap utgjør den femte premissen i Smalls argument. Den kan formaliseres på følgende måte:

G5 $\quad Nec(Psv(Gu))$

La oss nå vende oss mot de to siste mot de to siste premissene i argumentet. Er f en egenskap som impliserer enhver nødvendig egenskap ved x, og er det også slik at enhver nødvendig egenskap ved x er implisert av f, skal vi kalle f for en maksimalt nødvendig egenskap ved x. At f er en maksimalt nødvendig egenskap ved x kan uttrykkes ved betingelsen $(Ah)(Nec(h(x)) \leftrightarrow f \Rightarrow h)$. Den neste premissen uttrykker at dersom x er et individ med nødvendig eksistens så må dette nødvendigvis være tilfelle hvis og bare hvis enhver maksimalt nødvendig egenskap ved x har en ikke-tom ekstensjon i enhver verden. Premissen kan formaliseres slik:

G6 $\quad Nec[(Ax)(NE(x) \leftrightarrow (Af)(\ (Ah)(Nec(h(x)) \leftrightarrow f \Rightarrow h) \rightarrow Nec((Ex)f(x))\ ))\ ]$

Som man ser kan også dette oppfattes som en definisjon av predikatkonstanten NE. Den siste premissen i argumentet sier at egenskapen å ha nødvendig eksistens er en positiv egenskap:

© Morten Harboe Rognes

G7 Nec(Psv(NE))

Det er mulig at G7 er den minst plausible av de premissene vi har nevnt. Det er ikke på noen måte opplagt hvorfor det å eksistere i enhver mulig verden i seg selv skulle være noe positivt. Det er også mulig at definisjonen av nødvendig eksistens slik den er gitt ved G6 er inadekvat. Dette vil vi imidlertid drøfte nærmere i §6.

Konklusjonen i argumentet hvor vi nå har gjort rede for premissene er at det nødvendig at det finnes nøyaktig ett guddommlig individ. Dette kan uttrykkes slik:

K Nec((E!x) Gu(x))

I det følgende skal vi forkorte konjunksjonen av G1 - G7 med H. Man kan vise at dersom $\vdash H \rightarrow \alpha$ så har man også $\vdash H \rightarrow Nec(\alpha)$. Man ser jo at alle premissene har formen $Nec(\delta;i)$ $(i=1...7)$ slik at $\vdash H \leftrightarrow Konj/i,1,7/Nec(\delta;i)$. Men dette er jo ekvivalent med
(+) $\vdash H \leftrightarrow Nec(Konj/i,1,7/(\delta;i))$. Har vi derfor $\vdash H \rightarrow \alpha$, har vi ved hjelp av nødvendighets-regelen $\vdash Nec(H \rightarrow \alpha)$ og derfor, siden nødvendighet distribuerer over kondisjonaler, at $\vdash Nec(H) \rightarrow Nec(\alpha)$. Men siden (+) holder har vi i kraft av de rent modallogiske aksiomene som inngår i S5* at $\vdash H \leftrightarrow Nec(H)$. Det følger at man derfor må ha $\vdash H \rightarrow Nec(\alpha)$. Regelen $\vdash H \rightarrow \alpha \rightarrow \vdash H \rightarrow Nec(\alpha)$ holder derfor.

Vårt mål er nå å gi bevis for den følgende sats:

Teorem 5.1 Man har: $S5^* \vdash H \rightarrow Nec((E!x)Gu(x))$

Vi skal imidlertid ikke gjøre dette direkte. Først beviser vi at dersom H holder og f er en positiv egenskap kan man slutte at det logisk mulig at det finnes noe som har egenskapen f:

Teorem 5.2 Man har: $S5^* \vdash H \rightarrow (Psv(f) \rightarrow Pos((Ex)f(x))$[1]

Bevis: Man innser lett på basis av ren kvantifiksjonsteori at man har
(1) $\vdash H \rightarrow Psv(f) \,\&\, Nec((Ax)\neg f(x)) \rightarrow Nec((Ax)(f(x) \rightarrow \neg f(x))$.
Ved hjelp av komprehensjonsaksiomene har vi:
(2) $\vdash H \rightarrow (Eg)(Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow \neg(f(x)))))$. Vi setter nå per definisjon:
(2.1) $C;1 = (Eg)(Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow \neg(f(x))))) \rightarrow Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow \neg(f(x))))$
Fra dette og (2) følger da ved hjelp av ren setningslogikk:
(3) $\vdash C;1 \,\&\, H \rightarrow Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow \neg(f(x))))$
Siden G3 er en av premissene som inngår i H har vi direkte:
(4) $\vdash C;1 \,\&\, H \rightarrow Psv(f) \rightarrow (Ag)(Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow \neg f(x))) \rightarrow \neg Psv(f))$
Fra dette følger ved hjelp av universell instansiering:
(5) $\vdash C;1 \,\&\, H \rightarrow Psv(f) \rightarrow (Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow \neg f(x))) \rightarrow \neg Psv(f))$
Fra (3) og (5) kan vi slutte ved hjelp av ren setningslogikk at
(6) $\vdash C;1 \,\&\, H \rightarrow Psv(f) \rightarrow \neg Psv(g)$
Fra (1) og (3) utleder man lett:
(7) $\vdash C;1 \,\&\, H \rightarrow Psv(f) \,\&\, Nec((Ax)\neg f(x)) \rightarrow Nec((Ax)(f(x) \rightarrow g(x)))$
Ved hjelp av den definisjonen vi har gitt av => kan man herav slutte:
(8) $\vdash C;1 \,\&\, H \rightarrow Psv(f) \,\&\, Nec((Ax)\neg f(x)) \rightarrow f \Rightarrow g$

1 Dette er vår formalisering av Teorem 1 i Small [4]. Beviset som følger er en formalisering av det beviset han gir og representerer derfor egentlig ikke noe nytt.

© Morten Harboe Rognes

Siden G2 er en konjunkt i H har vi uten videre:

(9) $\vdash C;1 \ \& \ H \rightarrow Psv(f) \ \& \ f \Rightarrow g \rightarrow Psv(g)$

Man ser nå ved hjelp av ren setningslogikk at (8) og (9) impliserer følgende:

(10) $\vdash C;1 \ \& \ H \rightarrow Psv(f) \ \& \ Nec((Ax)\neg f(x)) \rightarrow Psv(g)$

Fra dette og (6) kan man slutte:

(11) $\vdash C;1 \ \& \ H \rightarrow Psv(f) \ \& \ Nec((Ax)\neg f(x)) \rightarrow (Psv(g) \ \& \ \neg Psv(g))$

Ved hjelp av setningslogikk følger herav:

(12) $\vdash C;1 \ \& \ H \rightarrow Psv(f) \rightarrow \neg Nec((Ax)\neg f(x))$

Fra dette (12) har man så siden $\neg Nec((Ax)\neg f(x))$ åpenbart er ekvivalent med $Pos((Ex)f(x))$:

(13) $\vdash C;1 \ \& \ H \rightarrow Psv(f) \rightarrow Pos(Ex)f(x))$

Herav ved hjelp av setningslogikk:

(14) $\vdash C;1 \rightarrow (H \rightarrow Psv(f) \rightarrow Pos(Ex)f(x)))$

Fra dette kan man så slutte ved hjelp av regelen om universell generalisering:

(15) $\vdash (Ag)(C;1 \rightarrow (H \rightarrow Psv(f) \rightarrow Pos(Ex)f(x))))$

Ved hjelp av kvantifiksjonsteori følger herav:

(16) $\vdash (Eg)(C;1) \rightarrow (H \rightarrow Psv(f) \rightarrow Pos(Ex)f(x))))$

Siden $\vdash (Eg)C;1$ kan man så slutte:

(17) $\vdash H \rightarrow (Psv(f) \rightarrow Pos((Ex)f(x))$

Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Den neste satsen sier at dersom H holder og x er et guddommelig vesen så er egenskapen å være guddommelig en maksimalt nødvendig egenskap ved x om vi holder oss til den definisjonen av "maksimalt nødvendig egenskap" som vi ga ovenfor.

Teorem 5.3 Man har: $\vdash H \rightarrow (Gu(x) \rightarrow (Ah)(Nec(h(x)) \leftrightarrow Gu \Rightarrow h))$[2]

Bevis: Siden G4 er en av konjunktene i H har vi:

(1) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \leftrightarrow (Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Psv(f))$

Fra dette følger så umiddelbart ved universell instansiering:

(2) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Nec(h(x)) \leftrightarrow Psv(h))$

Fra (1) følger ved hjelp av ren predikatlogikk:

(3) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Af)(Psv(f) \rightarrow Nec(f(x)))$

Herav har vi så ved hjelp av universell instansiering:

(4) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Psv(h) \rightarrow Nec(h(x))$

Siden $Nec(\alpha) \rightarrow \alpha$ er et aksiom i S5* kan vi herav slutte:

(5) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Psv(h) \rightarrow h(x)$

Fra (5) har vi så ved hjelp av ren setningslogikk:

(6) $\vdash H \rightarrow (Psv(h) \rightarrow (Gu(x) \rightarrow h(x)))$

Siden variabelen x ikke forekommer fri i H eller Psv(h) kan vi herav slutte:

(7) $\vdash H \rightarrow (Psv(h) \rightarrow (Ax)(Gu(x) \rightarrow h(x))$

Fra dette og regelen $\vdash H \rightarrow \alpha \rightarrow \vdash H \rightarrow Nec(\alpha)$ følger:

(8) $\vdash H \rightarrow Nec(Psv(h) \rightarrow (Ax)(Gu(x) \rightarrow h(x)))$

Siden Nec distribuerer over kondisjonalutsagn følger herav:

(9) $\vdash H \rightarrow Nec(Psv(h)) \rightarrow Nec((Ax)(Gu(x) \rightarrow h(x)))$

Siden G1 er en konjunkt i premissen H har vi ved setningslogikk, loven $Nec(\alpha) \rightarrow \alpha$ og universell instansiering at:

2 Denne satsen sier i det vesentlige det samme som Teorem 2 i Small [4]. Beviset vi følger i hovedtrekkene det beviset han gir.

© Morten Harboe Rognes

(10) $\vdash H \rightarrow Psv(h) \rightarrow Nec(Psv(h))$

Fra dette og (9) samt definisjonen av => kan vi slutte:

(11) $\vdash H \rightarrow Psv(h) \rightarrow Gu \Rightarrow h$

Fra (11) og (2) følger ved hjelp av predikatlogikk:

(12) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Nec(h(x)) \rightarrow Gu \Rightarrow h)$

Siden variabelen h ikke forekommer fri i H eller Gu(x) følger herav:

(13) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Ah)(Nec(h(x)) \rightarrow Gu \Rightarrow h)$

G5 er en konjunkt i H. Fra dette faktum samt det at $Nec(\alpha) \rightarrow \alpha$ følger:

(14) $\vdash H \rightarrow Psv(Gu)$

Siden G2 er en konjunkt i H følger ved universell instansiering:

(15) $\vdash H \rightarrow Psv(Gu) \rightarrow Gu \Rightarrow h \rightarrow Psv(h)$

Fra dette og (14) har vi ved hjelp av ren setningslogikk:

(16) $\vdash H \rightarrow Gu \Rightarrow h \rightarrow Psv(h)$

Siden G4 er en konjunkt i H har man:

(17) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Psv(f))$

Herav har vi så ved hjelp av predikatlogikk:

(18) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Psv(h) \rightarrow Nec(h(x))$

Fra (16) og (18) følger ved hjelp av setningslogikk:

(19) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow Gu \Rightarrow h \rightarrow Nec(h(x))$

Siden variabelen h ikke forekommer fri i Gu(x) og H følger herav:

(20) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Ah)(Gu \Rightarrow h \rightarrow Nec(h(x)))$

Fra dette og (13) følger så det vi ønsker:

(21) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Ah)(Nec(h(x)) \leftrightarrow Gu \Rightarrow h)$ **QED.**

Den neste satsen viser at man fra H kan slutte at det nødvendigvis finnes et guddommelig vesen:

Teorem 5.4 Man har: $\vdash H \rightarrow Nec((Ex)Gu(x))$[3]

Bevis: I lys av Teorem 5.3 har vi:

(1) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Ah)(Nec(h(x)) \leftrightarrow Gu \Rightarrow h)$

Nå er G7 en konjunkt i H derfor har vi:

(2) $\vdash H \rightarrow Psv(NE)$

Siden G4 er en konjunkt i H har vi ved hjelp av setningslogikk:

(3) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Ah)(Nec(h(x)) \leftrightarrow Psv(h))$

Fra (2) og (3) kan man slutte:

(4) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow Nec(NE(x))$

Herav følger så ved hjelp av loven $Nec(\alpha) \rightarrow \alpha$ og setningslogikk:

(5) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow NE(x)$

Fra dette og det faktum at G6 er en konjunkt i H følger:

(6) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow (Af)((Ah)(Nec(h(x) \leftrightarrow f \Rightarrow h) \rightarrow Nec((Ex)f(x))$

Instansierer vi f med hensyn på Gu og bruker (1) kan man herav slutte:

(7) $\vdash H \rightarrow Gu(x) \rightarrow Nec((Ex)Gu(x))$

Siden variabeln x ikke forkommer fri H følger herav:

(8) $\vdash H \rightarrow (Ax)(Gu(x) \rightarrow Nec((Ex)Gu(x)))$

3 Dette er Teorem 3 i Small [1]. Small gir et ganske detaljert bevis for denne satsen. Det beviset vi gir følger hovedtrekkene i hans bevis og representerer derfor ikke noe nytt bortsett fra at vårt bevis er mer formalisert og eksplisitt basert på aksiomene i kalkylen S5* som Small ikke gir noen fremdtilling av.

© Morten Harboe Rognes

Fra dette følger ved hjelp av rent predikatlogiske lover:

(9) $\vdash H \rightarrow (Ex)(Gu(x)) \rightarrow Nec((Ex)Gu(x))$

Herav kan man så slutte ved hjelp av regelen $\vdash H \rightarrow \alpha \quad \rightarrow \vdash H \rightarrow Nec(\alpha)$

(10) $\vdash H \rightarrow Nec[(Ex)(Gu(x)) \rightarrow Nec((Ex)Gu(x))]$

Siden vi har $\vdash Nec(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow . Pos(\alpha) \rightarrow Pos(\beta)$ følger fra (10):

(11) $\vdash H \rightarrow Pos((Ex)(Gu(x)) \rightarrow Pos(Nec((Ex)Gu(x)))$

Siden Nec(Psv(Gu)) er en komponent i H har vi:

(12) $\vdash H \rightarrow Psv(Gu)$

Fra (12) og Teorem 5.2 følger:

(13) $\vdash H \rightarrow Pos((Ex)Gu(x))$

Fra dette og (11) kan vi så i sin tur slutte:

(14) $\vdash H \rightarrow Pos(Nec((Ex)Gu(x)))$

Siden $Pos(Nec(\alpha)) \rightarrow Nec(\alpha)$ er et teorem i S5* kan vi så konkludere med

(15) $\vdash H \rightarrow Nec((Ex)Gu(x))$

Dette viser at satsen holder. **QED**.

Den forrige satsen uttrykker bare at det finnes et guddommelig vesen. Det sier ikke at det finnes ett og bare ett slikt vesen. Dette lar seg imidlertid bevise gitt H. Først gir vi bevis for følgende sats:

Teorem 5.5 Man har: $\vdash H \rightarrow (Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Nec(f(y))) \rightarrow x=y$

Bevis: Det følgende er et rent identitetsteoretisk teorem i S5*:

(1) $\vdash H \rightarrow (Ez)(x=z)$

Vi setter nå per definisjon:

(2) $C;1(w) =;d (Ez)(x=z) \rightarrow x=w$

Man ser da at man umiddelbart har fra (1) og (2) at følgende holder:

(3) $\vdash C;1(w) \,\&\, H \rightarrow x=w$

Ved hjelp av komprehensjonsaksiomet C1 kan man konkludere med at:

(4) $\vdash H \rightarrow (Eg)(Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow x=w)))$

Vi definerer uttrykket $C;2(g)$ ved å sette:

(5) $C;2(g) =;d (Eg)(Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow x=w))) \rightarrow Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow x=w))$

Fra (4) og (5) følger:

(6) $\vdash C;2(g) \,\&\, C;1(w) \,\&\, H \rightarrow Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow x=w))$

Fra konsekventen i (6) følger $Nec(g(x) \leftrightarrow x=w)$. Herav har vi videre $Nec(g(x)) \leftrightarrow Nec(x=w)$. Men $Nec(x=w) \leftrightarrow x=w$. Vi har derfor fra (6):

(7) $\vdash C;2(g) \,\&\, C;1(w) \,\&\, H \rightarrow . Nec(g(x)) \leftrightarrow x=w$

På tilsvarende vis har vi fra (6) ved å instansiere med hensyn på y:

(8) $\vdash C;2(g) \,\&\, C;1(w) \,\&\, H \rightarrow . Nec(g(y)) \leftrightarrow y=w$

Nå er det temmelig opplagt at vi har:

(9) $\vdash C;2(g) \,\&\, C;1(w) \,\&\, H \rightarrow (Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Nec(f(y))) \rightarrow . Nec(g(x)) \leftrightarrow Nec(g(y))$

Fra dette, (7) og (8) kan vi så slutte:

(10) $\vdash C;2(g) \,\&\, C;1(w) \,\&\, H \rightarrow (Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Nec(f(y))) \rightarrow . x=w \leftrightarrow y=w$

Fra (3) følger:

(11) $\vdash C;2(g) \,\&\, C;1(w) \,\&\, H \rightarrow (Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Nec(f(y))) \rightarrow . x=w$

Ved hjelp av (10) og (11) kan vi så ved ren setningslogikk utlede:

(13) $\vdash C;2(g) \,\&\, C;1(w) \,\&\, H \rightarrow (Af)(Nec(f(x)) \leftrightarrow Nec(f(y))) \rightarrow . x=w \,\&\, y=w$

Herav følger så:

© Morten Harboe Rognes

(14) |- C;2(g) &C;1(w) & H → (Af)(Nec(f(x)) ↔ Nec(f(y))) →. x=y

Nå har vi i lys av definisjonen av C;2(g) at følgende er et predikatlogisk teorem:

(15) |- (Eg)C;2(g)

Ved å bruke (15) og universell generalisering på (14) kan man utlede:

(16) |- C;1(w) & H → (Af)(Nec(f(x)) ↔ Nec(f(y))) →. x=y

I lys av definisjonen av C;1(w) ser man lett at følgende er et predikatlogisk teorem:

(17) |- (Ew)C;1(w)

Fra dette og (16) følger så:

(18) |- H → (Af)(Nec(f(x)) ↔ Nec(f(y))) →. x=y

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi er nå istand til å vise at H impliserer at dersom det finnes noe guddommelig vesen så er dette vesen entydig bestemt. Den følgende sats uttrykker nettopp dette:

Teorem 5.6 Man har: |- H → Nec((Ax)(Ay)(Gu(x) & Gu(y) → x=y))

Bevis: Siden G4 inngår som en komponent i H har vi at det følgende holder:

(1.1) |- H → Gu(x) → (Ah)(Nec(h(x)) ↔ Psv(h))

(1.2) |- H → Gu(y) → (Ah)(Nec(h(y)) ↔ Psv(h))

Fra disse to forhold ser man at vi må ha:

(2) |- H → Gu(x) & Gu(y) → (Ah)(Nec(h(x)) ↔ Nec(h(y)))

Herav kan vi imidlertid ved hjelp av Teorem 5.5 slutte at:

(3) |- H → Gu(x) & Gu(y) → x=y

Ved hjelp av regelen om universell generalisering følger herav:

(4) |- H → (Ax)(Ay)(Gu(x) & Gu(y) → x=y)

Siden regelen vi kan utlede regelen: |- H→α → |- H →Nec(α) følger fra (4):

|- H → Nec((Ax)(Ay)(Gu(x) & Gu(y) → x=y))

Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Man ser nå at Teorem 5.1, nemlig: |- H → Nec((E!x)Gu(x)) følger umiddelbart fra Teorem 5.4 og Teorem 5.6. Dermed har vi bevist det vi ønsker.

La oss bemerke at vi ikke ovenfor har bidratt med noe av egentlig original karakter. Det vi har gjort så langt har bare vært å formulere helt eksplisitt språket, aksiomskjemaene og slutningsreglene i den annen-ordens modalkalkylen som Small baserer seg på i sin versjon av Gödels argument. Dessuten har vi formalisert de satser han anfører i Small [4] , samt fremlagt formaliserte versjoner av de bevis han gir mer uformelt innenfor den formelle rammen vi har satt opp i §2 og §3.

§6 Semantisk analyse av Smalls første versjon av det ontologiske argument.

I dette avsnittet skal vi i den første delen studere nærmere hva akisiomskjemane G1 -G7 innebærer semantisk sett. Det er imidlertid hensiktsmessig å definere en del begreper før man går løs på denne oppgaven.

Vi skal i det følgende forutsette at D er en ikke-tom mengde med individer. Mengden I tenker vi oss at er mengden av mulige verdener. Denne forutsettes også å være ikke-tom. Er x og y to vilkårlige mengder gjør vi oppmerksom på at x^y betegner mengden av alle de funksjoner hvor domenet er y og verdiområdet er inkludert i x. Vi setter E;1 = Pt(D)^I. Funksjonene i

© Morten Harboe Rognes

E;1 representerer mengden av av alle monadiske egenskaper av *første orden*. Videre setter vi E;2 = Pt(E;1)^I. E;2 representerer alle egenskaper av *annen orden*, med andre ord alle egenskaper ved egenskaper av første orden. Vi arbeider i dette avsnittet innenfor rammen av en vanlig standard mengdelære og antar at mengdene D og I selvfølgelig eksisterer.

Det er nødvendig med ytterligere noen definisjoner. Er xêE;1 og wêI har vi at x(w) er en mengde av individer. Vi kaller x(w) for ekstensjonen til egenskapen x i verdenen w. Tilsvarende hvis x er en egenskap av annen orden. Vi gjør også oppmerksom på at vi skal bruke ordene "egenskap" og "attributt" synonymt. Er x,y to attributter av første orden sies egenskapen x å implisere egenkapen y hvis og bare hvis man har for enhver verden w at ekstensjonen til x i w er inkludert i ekstensjonen til y i w. Vi betegner denne implikasjonsrelasjonen mellom egenskaper av første orden med =>.

Er f en egenskap av første orden er negasjonen av f, som vi betegner med Neg(f), den egenskapen hvis ekstensjon i enhver verden w er komplementet til ekstensjonen til f i verdenen w med hensyn på mengden av individer D.

Definisjon 6.1
(a) Anta a,b êE;1. Da setter vi:
$$a \Rightarrow b \leftrightarrow (Aw)(w \hat{e} I \rightarrow a(w) \text{ Inkl } b(w))$$
(b) Anta aêE;1. Da setter vi:
$$Neg(a) = (if)(Func(f) \& Dom(f)=I \& (Aw)(w \hat{e} I \rightarrow f(w) = D\text{-}a(w)))$$

Man ser umiddelbart fra denne definisjonen at dersom aêE;1 har man også at Neg(a)êE;1.

La x være et vilkårlig individ i D. Anta at f er en egenskap av første orden. Da sier vi at f er en nødvendig egenskap ved x hvis og bare hvis x har egenskapen f i enhver verden i I. Har vi at g er en egenskap av første orden som er inkludert i enhver nødvendig egenskap ved x sies g å være en vesentlig eller essentiell egenskap ved x. Vi skal bruke uttrykket "Ess(f,x)" som forkortelse for uttrykket "f er en essentiell egenskap ved x". Uttrykket defineres slik:

Definisjon 6.2 Anta xêD og fêE;1. Da setter vi:
$$Ess(f,x) \leftrightarrow f \hat{e} E;1 \ \& \ (Ab)(b \hat{e} E;1 \rightarrow ((Aw)(w \hat{e} I \rightarrow x \hat{e} b(w)) \leftrightarrow a \Rightarrow b))$$

Et individ i x sies å ha nødvendig eksistens, i symboler "Ne(x)", hvis og hvis enhver vesentlig egenskap ved x har en ikke-tom ekstensjon i enhver verden. Den egenskapen av første orden hvis ekstensjon i enhver verden er Mg(x: Ne(x)) skal vi betegne med N. De formelle definisjonene av disse begrepene er gitt ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.3
(a) Anta xêD og fêE;1. Da setter vi:
$$Ne(x) \leftrightarrow. \ x \hat{e} D \ \& \ (Ab)(Ess(b,x) \rightarrow (Aw)(w \hat{e} I \rightarrow b(w) \neq \emptyset))$$
(b) $N = (if)(Func(f) \& Dom(f)=I \& (Aw)(w \hat{e} I \rightarrow f(w) = Mg(x: Ne(x))))$

Det er nødvendig å definere ytterligere to begreper. Anta X er en egenskap ved egenskaper, med andre ord et element i E;2. La a være en første-ordens egenskap og x et individ i D. Da sier vi at a er en nødvendig egenskap ved x hvis og bare hvis x er med i ekstensjonen til a for enhver verden w. Dette innebærer at a er en nødvendig egenskap ved x hvis og bare hvis $(Aw)(w \hat{e} I \rightarrow x \hat{e} a(w))$. Vi betegner mengden av alle de individer x som er med i D der vi har

© Morten Harboe Rognes

for enhver første-ordens egenskap a at denne er en nødvendig egenskap ved x hvis og bare hvis a er med i ekstensjonen til X i verdenen w med g;w(X). Selve den funkjonen som tilordner enhver verden wêI mengden g;w(X) betegner vi med G(X). Disse to begrepene kan defineres formelt slik:

Definisjon 6.4
(a) Anta XêE;2 og at wêI. Da setter vi:
g;w(X) = Mg(xêD & (Aa)(aêE;1 → ((Aw')(w'êI → xêa(w')) ↔ aêX(w))))
(b) G(X) = (if)(Func(f) & Dom(f)=I & (Aw)(wêI → f(w) = g;w(X)))

Vi har bruk for ytterligere noen begreper. Den egenskapen hvis ekstensjon i enhver verden er mengden av alle individer ie Mg(x: xêD & x=x) skal vi omtale som den universelle egenskapen. Denne egenskapen svarer til all-mengden i vanlig mengde-lære. Vi betegner denne egenskapen med V.

Anta x er et individ i D. Egenskapen hvis ekstensjon i enhver verden er enhetsmengden som inneholder x, det vil si {x} skal vi betegne med μ;x.

Anta X er en mengde med egenkaper av første orden. Da er UNe(X) (SNe(X)), egenskapen som er unionen (snittet) av egenskapene i X den funksjonen som til enhver verden w tilordner denne unionen (snittet) av mengden av de diverse f(w) der f er med i X.

Definisjonene av disse fire begrepene kan sammenfattes i den følgende definisjon:

Definisjon 6.5
(a) V = Mg(<w, Mg(x: xêD & x=x)>: wêI)
(b) μ;x = Mg(<w,{x}>: wêI)
(c) Anta X Inkl E;1. Da er UNe(X) og SNe(X) definert slik:
UNe(X) = (if)(Func(f) & Dom(f)= I & (Aw)(wêI → f(w)= UN(Mg(a(w): aêX))
SNe(X) = (if)(Func(f) & Dom(f)= I & (Aw)(wêI → f(w)= SN(Mg(a(w): aêX))

Siden vi nå har fiksert de begrepene vi trenger i den videre utvikling går vi over til den semantiske analysen av premissene G1 - G7. I det følgende skal M=<D,I,V> være en modell for L. D er mengden av mulige individer og I er mengden av mulige verdener slik vi har forklart ovenfor. V er en tilordningsfunksjon som oppfyller kravene nevnt i Definisjon 3.2. Dette innebærer at V tilordner predikatkonstantene av første orden Gu og Ne egenskaper av første orden, det vil si elementer i E;1=D^I. V tilordner predikatkonstanten Psv av annen orden et element i E;2. I det følgende betegner vi V(Gu) med Gu*. Det følger at Gu*êE;1. Videre betegnes V(Ne) med Ne*. Naturligvis har vi da Ne*êE;1. Endelig betegnes V(Psv) med Psv*. Det følger da at Psv*êE;2.

Psv* vil da være egenskapen å være en positiv egenskap. Når det gjelder positive egenskaper kan ikke Small sies å være overveldende generøs når det gjelder å gi eksempler. Men det er mulig å gi noen på egenhånd. her vil vi regne slike egenskaper som å være et vennlig vesen, å være hjelpsom, å være overbærende, å utstråle godhet og å være utholdende for gode egenskaper. Man kan naturligvis forlenge denne listen.

Ne* representerer egenskapen av første orden som er betegnet av predikatet "Ne". Tidligere antydet vi lesemåten "x har nødvendig eksistens" for predikatet Ne. I så tilfelle er Ne* egenskapen å ha nødvendig eksistens. Endelig er Gu* egenskapen å være et guddommelig vesen.

(A) La oss nå se på hva G1 uttrykker om vi legger til grunn denne "naturlige" modellen M.

© Morten Harboe Rognes

Anta w er et vilkårlig element i I. Da har vi:

(1) <M,w> ⊨ G1 ↔ <M,w> ⊨ Nec((Af)(Psv(f) ↔ Nec(Psv(F)). Nå har vi i lys av valusajonsreglene som er gitt for ⊨ at høyre side i (1) holder hvis og bare hvis vi har :

(2) (Aw)(wêI → <M,w> ⊨ (Af)(Psv(f) ↔ Nec(Psv(f)))). Man ser lett at konsekventen i (2) er ekvivalent med :

(3) (Af)(fêE;1 →. fêPsv*(w) ↔ (Aw')(w'êI → fêPsv*(w'))). Det følger at Nå ser man lett at dersom (3) holder for alle wêI er Psv* en konstant funksjon, med andre ord har egenskapen Psv* den samme ekstensjon i alle mulige verdener. Det følger derfor at vi har:

(4) <M,w> ⊨ G1 ↔ (Aw)(Aw')(w,w'êI → Psv*(w) = Psv*(w')

Mengden av de positive egenskaper endrer seg altså ikke når man går fra en verden til en annen. Dette er i det vesentlige hva G1 sier.

(B) La oss dernest studere G2. Man ser nesten umiddelbart i lys av valuasjonsrglene for ⊨ at dersom vi har Nec((Ax)f0(x) →g0(x)) der f0 og g0 er to predikatkonstanter av type 1 så vil den egenskapen f0 betegner implisere den egenskapen g0 betegner. Man har derfor at <M,w> ⊨ Nec((Ax)f0(x) →g0(x)) holder hvis og bare hvis V(f0) =>V(g0). Det følger fra dette at <M,w> ⊨ G2 holder hvis og bare hvis det gjelder for alle wêI at

(Af)(Ag)(f,gêE;1 & f=> g & fêPsv*(w). → gêPsv*(w)).

Dette viser tydelig hva G2 sematisk sett innebærer.

(C) Når det gjelder G3 skal vi først se litt på uttrykket "Nec((Ax)(g(x) ↔¬f(x))). Siden "f" og "g" er varabeltegn kan vi sette inn to predikatkonstanter av første orden, la oss kalle dem "f0" og g0" for henholdsvis "f" og g". Da har man at <M,w> ⊨ Nec((Ax)(g0(x) →¬f0(x))) hvis og bare hvis (Aw)(wêI → <M,w> ⊨ (Ax)(g0(x) →¬f0(x))). Men dette siste er åpenbart ekvivalent med følgende:

(Aw)(wêI → (Ax)(xêD →. xêV(g0)(w) ↔ xê(D - V(f0)(w))))

Men dette ser man, når man husker på definisjonen av negasjonen av en egenskap i sin tur ekvivalent med: V(g0) = Neg(V(f0)). Tar man hensyn til disse overveielsene ser man videre ganske raskt at det følgende holder:

<M,w> ⊨ G3 ↔ (Aw)(wêI →(Aa)(aêE;1 & aêPsv*(w) → ¬(Neg(a)êPsv*(w))))

Høyre side i denne ekvivalensen representerer følgelig det semantiske innholdet til G3.

(D) Forsøker man å uttrykke hva G4 sier i ord kan man si følgende: "Nec(f(x)) sier at individet x nødvendigvis har egenskapen f. "Psv(f)" uttrykker at f er en positiv egenskap. Følgelig sier "(Af)(Nec(f(x) ↔ Psv(f))" at enhver nødvendig egenskap ved x er positiv og omvendt. Man kunne si, per definisjon, at et individ x som er slik at (Af)(Nec(f(x)) ↔ Psv(f)) er et individ hvis vesen er helt igjennom positivt. I så fall sier G4 at det er logisk nødvendig at noe er et guddommelig vesen hvis og bare hvis det er et individ hvis vesen er helt igjennom positivt.

Anta w er et vilkårlig element i I og at x er et vilkårlig individ. La n(x) være navnet på x. Da har vi <M,w> ⊨ (Af)(Nec(f(n(x))) ↔ Psv(f)) er ekvivalent med:

(Aa)(aêE;1 → ((Aw)(wêI → xêa(w)) ↔ aêPsv*(w)). I lys av den definisjonen vi ovenfor har gitt av g;w(X) ser man derfor at vi har:

<M,w> ⊨ (Af)(Nec(f(n(x))) ↔ Psv(f)) ↔ xêg;w(Psv*)

Studerer man nå G4 som helhet har man at

. <M,w> ⊨ G4 ↔ (Aw)(wêI → (Ax)(xêD →. xêGu*(w) ↔ xêg;w(Psv*)))

I lys av den definisjonen av G som har blitt gitt Definisjon 6.4 er dette ekvivalent med:

© Morten Harboe Rognes

$\langle M,w\rangle \models G4 \leftrightarrow \; Gu^* = G(Psv^*)$

Det skulle nå være lett å se hva G5 innebærer. Vi har:

$\langle M,w\rangle \models G5 \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Gu^*\hat{e}Psv^*(w)) \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow G(Psv^*)\hat{e}Psv^*(w))$

(E) Innholdet i G6 er noe mer komplisert. Vi gjør et forsøk på å forklare innholdet trinnvis. Anta først at $x\hat{e}D$ og $w\hat{e}I$. Anta videre at a er en egenskap av første orden, ie. $a\hat{e}E;1$. Anta n(a) er navnet på a i L(M) og at n(x) er navnet på x. Da har vi at

(1) $\langle M,w\rangle \models (Ah)(Nec(h(n(x)) \leftrightarrow n(a) \Rightarrow h)$ hvis og bare hvis det følgende holder:

(2) $(Ab)(b\hat{e}E;1 \rightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow x\hat{e}b(w)) \leftrightarrow a \Rightarrow b)$. I lys av den definisjonen vi har gitt av Ess ovenfor ser man derfor at (2) er ekvivalent med (3) Ess(a,x). Vi har derfor om $x\hat{e}D$ og $w\hat{e}I$ at (4) $\langle M,w\rangle \models (Ah)(Nec(h(n(x)) \leftrightarrow n(a) \Rightarrow h) \leftrightarrow Ess(a,x)$

Er $a\hat{e}E;1$ har man at $\langle M,w\rangle \models Nec((Ex)n(a)(x))$ holder hvis og bare hvis $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow a(w) \neq \emptyset)$. Fra de overveielsene vi nå har fremlagt ser man at vi må ha at

$\langle M,w\rangle \models (Af)((Ah)(Nec(h(n(x)) \leftrightarrow f \Rightarrow h) \rightarrow Nec((Ex)f(x))$ holder hvis og bare hvis $(Aa)(Ess(a,x) \rightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow a(w) \neq \emptyset))$. Dette holder i sin tur, når man tar i betraktning Definisjon 6.2 og Definisjon 6.3, hvis og bare hvis Ne(x). Det følger derfor:

$\langle M,w\rangle \models G6 \leftrightarrow Ne^* = N$

Man ser derfor tydelig at G6 har karakter av en definisjon av Ne*.

Det er nå lett å se hva G7 sier semantisk sett. Vi har:

$\langle M,w\rangle \models G7 \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Ne^* = N\hat{e}Psv^*(w))$

Dermed har vi gjennomgått alle premissene G1 - G7 og studert nærmere hva de semantisk sett uttrykker. Man kan sammenfatte de resultatene vi har nådd frem til i den følgende sats:

Teorem 6.0 Anta $M=\langle D,I,V\rangle$ er en modell for L der valuasjonsfunksjonen V er definert på den måten som er forklart ovenfor. Da holder følgende påstander, om $w\hat{e}I$:

H1 $\langle M,w\rangle \models G1 \leftrightarrow$
$(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Af)(f\hat{e}E1 \rightarrow (f\hat{e}Psv^*(w) \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow f\hat{e}Psv^*(w)))))$

H2 $\langle M,w\rangle \models G2 \leftrightarrow$
$(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Af)(Ag)(f,g\hat{e}E;1 \;\&\; f \Rightarrow g \;\&\; f\hat{e}Psv^*(w) \rightarrow g\hat{e}Psv^*(w)))$

H3 $\langle M,w\rangle \models G3 \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Af)(f\hat{e}E;1 \;\&\; f\hat{e}Psv^*(w) \rightarrow \neg(Neg(f)\hat{e}Psv^*(w)))$

H4 $\langle M,w\rangle \models G4 \leftrightarrow Gu^* = G(Psv^*)$

H5 $\langle M,w\rangle \models G5 \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Gu^*\hat{e}Psv^*(w))$

H6 $\langle M,w\rangle \models G6 \leftrightarrow Ne^* = N$

H7 $\langle M,w\rangle \models G7 \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow N\hat{e}Psv^*(w))$

Man ser at høyresidene i H1 - H7 representerer det som venstresidene semantisk sett uttrykker. Betegner vi høyre siden i Hi (i=1-7) med Hi* har vi:

H1* $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Af)(f\hat{e}E1 \rightarrow (f\hat{e}Psv^*(w) \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow f\hat{e}Psv^*(w)))))$

H2* $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Af)(Ag)(f,g\hat{e}E;1 \;\&\; f \Rightarrow g \;\&\; f\hat{e}Psv^*(w) \rightarrow g\hat{e}Psv^*(w)))$

H3* $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Af)(f\hat{e}E;1 \;\&\; f\hat{e}Psv^*(w) \rightarrow \neg(Neg(f)\hat{e}Psv^*(w)))$

H4* $Gu^* = G(Psv^*)$

H5* $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Gu^*\hat{e}Psv^*(w))$

H6* $Ne^* = N$

H7* $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow N\hat{e}Psv^*(w))$

© Morten Harboe Rognes

Anta XêE;2 Anta videre at vi setter inn X overalt hvor det står Psv* i H1* - H7*. Da får man at X må oppfylle de følgende betingelser.

C1 (Aw)(wêI → (Aa)(aêE;1→ aêX(w) ↔ (Aw')(w'êI → aêX(w'))))
C2 (Aw)(Aa)(wêI & aêE;1 →. aêX(w) → ¬(Neg(a)êX(w))
C3 (Aw)(Aa)(Ab)(wêI & a,bêE;2 →. aêX(w) & a=> b → bêX(w))
C4 (Aw)(wêI → G(X)êX(w))
C5 (Aw)(wêI → NêX(w))

Her er selvfølgelig egenskapen N og funksjonen G definert som tidligere. I denne forbindelse kan man konsultere Definisjon 6.3ab og definisjon 6.4ab. Siden H4* og H6* kan oppfattes som definisjoner av henholdsvis Gu* og Ne* kan kravene H4* - H7* komprimeres til C4 og C5 sslik vi har gjort ovenfor.

Det vi nå ønsker å gjøre er å studere nærmere egenskapene til enhver egenskap X av annen orden som oppfyller kravene C1 - C5. En viktig ting er at vi etterhvert skal vise at det eksisterer annenordens egenskaper X som oppfyller disse fem kravene. Dette innebærer at det finnes modeller for S5* som oppfyller kravene H1* - H7* og som derfor gjør alle premissene i det første argumentet til Small sanne. I sin tur innebærer dette at premiss-settet er konsistent. Dette er naturligvis viktig og ikke direkte opplagt. det er ikke opplagt for de neppe kan sies å være *direkte* opplagt at det finnes noen X som oppfyller kravene C1 - C5.

Vårt første teorem viser at dersom X oppfyller kravene C1 - C5 har man at funksjonen som til enhver verden w tilordner g;w(X) er en konstant funksjon:

Teorem 6.1 Anta XêE;2 og at X oppfyller kravene C1 - C5. Da har man:
(Aw)(Aw')(w,w'êI → g;w(X) = g;w'(X))

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. C1 sier at:
(1) (Aw)(wêI → (Aa)(aêE;1→ aêX(w) ↔ (Aw')(w'êI → aêX(w')))). Vi skal vise at dette impliserer: (+) (Aw)(Aw')(w,w'êI → X(w)=X(w')). Anta for vilkårlige w,w' at (2) w,w'êI. Anta
(3) aêE;1 & aêX(w) for vilkårlig a. Dette og (1) impliserer: (Aw')(w'êI → aêX(w')). Dette og (2) implierer åpenbart aêX(w')). Dette viser at X(w) Inkl X(w'). Anta på den annen side for vilkårlig a at (4) aêE;1 & aêX(w'). Siden w'êI ifølge (2), har man ved hjelp av (1) at:
(5) aêX(w') ↔ (Aw")(w"êI → aêX(w")). Fra dette of (4) følger (Aw")(w"êI → aêX(w")). Herav kan vi ved hjelp av (2) slutte at aêX(w). Siden a var et vilkårlig element der aêE;1 & aêX(w') har vi nå vist X(w') Inkl X(w). Siden vi ovenfor viste X(w) Inkl X(w') følger det at (+) holder.

Ved hjelp av Definisjon 6.4 har man
(6) g;w(X) = Mg(xêD & (Aa)(aêE;1 → ((Aw")(w"êI → xêa(w")) ↔ aêX(w)))) og
(7) g;w'(X) = Mg(xêD & (Aa)(aêE;1 → ((Aw")(w"êI → xêa(w")) ↔ aêX(w'))))

Anta for vilkårlige w,w' at w,w'êI. Fra dette og (+) følger (8) X(w) = X(w'). Fra dette, (6) og (7) følger det vi ønsker, nemlig: g;w(X) = g;w'(X). **QED**.

Vårt neste teorem viser at derssom X oppfyller kravene C1 - C5 og a er en egenskap om er med i ekstensjonen til X i en eller annen verden så finnes er ekstensjonen til a ikke-tom i en eller annen verden. Det som svarer syntaktisk sett til dette teoremet er Teorem 5.2

© Morten Harboe Rognes

Teorem 6.2 Anta XêE;2 og at X oppfyller kravene C1 - C5. Da har man:
(Aw)(wêI & aêX(w) → (Ew')(w'êI & a(w')≠ø)

Bevis: Anta forutsetningene holder og anta for vilkårlig a og w at (1) wêI & aêX(w). Anta for reduktio ad absurdum at (2) (Aw')(w'êI → a(w')=ø). Herav følger umiddelbart, siden nullmengden er inkludert i enhver mengde, at (3) (Aw')(w'êI → a(w') Inkl D-a(w')). Ved hjelp av definisjonene av => og Neg kan vi derfor slutte: (4) a =>Neg(a). Fra dette, (1) og forutsetningen C3 følger (5) Neg(a)êX(w). Men fra (1) og C2 følger følger ¬(Neg(a)êX(w)). Dette strider åpenbart mot (5). Det følger at (2) leder til en motsigelse. Dette viser at satsen holder. **QED**.

Vårt neste teorem er den semantiske motsvarighet til Teorem 5.3. Hvis X er egenskapen å være en positiv egenskap og vi oppfatter egenskapen å være guddommelig som identisk med G(X) sier satsen at dersom x er et guddommelig vesen så er egenskapen å være guddommelig en essensiell egenskap ved x.

Teorem 6.3 Anta XêE;2 og at X oppfyller kravene C1 - C5. Anta wêI og xêD. Da har vi:
xêG(X)(w) → Ess(G(X),x)

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og (1) wêI & xêD for vilkårlige x og w. Anta (2) xêG(X)(w). I lys av definisjonen av Ess er det da tilstrekkelig å vise:
(+) (Ab)(bêE;1 → ((Aw)(wêI → xêb(w)) ↔ G(X) =>b))

(A) Vi viser først halvdelen mot høyre i (+). Anta derfor for vilkårlig b at
(3) bêE;1 & (Aw)(wêI → xêb(w)). Vi ønsker å vise G(X) =>b. Fra Definisjon 6.4 har vi:
(4) g;w(X) = Mg(xêD & (Aa)(aêE;1 → ((Aw")(w"êI → xêa(w")) ↔ aêX(w))))
Fra (2) og Definisjon 6.4 følger (5) xêg;w(X). Fra dette, (1), (3) og (4) har vi:
(6) bêX(w). Vi ta nå sikte på å bevise:
(#) (Aw)(wêI & bêX(w) → (Ay)(yêG(X)(w) →yêb(w)))
Anta derfor (7) wêI & bêX(w) & yêG(X)(w) for vilkårlige w og y. Fra den tredje konjuunkten i (7) følger yêg;w(X). Fra dette og (4) ovenfor har vi:
(8) (Aa)(aêE;1 → ((Aw")(w"êI → yêa(w")) ↔ aêX(w)))
Ved hjelp av dette, det forhold at bêE;1 og den andre konjunkten i (7) følger:
(Aw")(w"êI → yêb(w")). Herav følger så ved hjelp av den første konjunkten i (7) at yêb(w). Siden w og y var vilkårlige entiteter slik at (7) følger det at (#) holder. Fra (3), (6) og forutsetningen C1 følger (Aw)(wêI → bêX(w)). Fra dette og (#) følger
(Aw)(wêI → (Ay)(yêG(X)(w)→yêb(w)). Herav kan man så ved hjelp av definisjonen av => slutte at G(X) => b. Vi har dermed vist halvdelen mot høyre i (+).

(B) Vi viser så halvdelen mot venstre i (+). Anta (9) bêE;1 & G(X) => b for vilkårlig b. Anta (10) wêI for vilkårlig w. Fra forutsetningen C4 følger da G(X)êX(w). Fra dette (9) og forutsetningen C3 følger så bêX(w). Fra (2) følger xêg;w(X). Fra dette og Definisjon 6.4 følger så (Aa)(aêE;1 → ((Aw)(wêI → xêa(w)) ↔ aêX(w))). Siden bêX(w) og bêE;1 kan vi derfor slutte: (Aw)(wêI → xêa(w)). Men b var vilkårlig objekt slik at (9). Vi har derfor:
(Ab)(bêE;1 & G(X) => b → (Aw)(wêI → xêa(w))). Men w var et vilkårlig element i I. Derfor:
(Aw)(wêI → (Ab)(bêE;1 & G(X) => b → (Aw)(wêI → xêa(w)))). Siden I≠ø følger herav:
(Ab)(bêE;1 & G(X) => b → (Aw)(wêI → xêa(w))). Dette viser at halvdelen mot venstre i (+)

© Morten Harboe Rognes

holder. Dermed har vi levert et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi kommer nå til et viktig resultat, nemlig at dersom X er en egenskap av annen orden som oppfyller kravene C1 - C5 så har vi i enhver verden at ekstensjonen til G(X) er ikke-tom. Tenker vi oss at X representerer mengden av positive egenskaper og at G(X) representerer egenskapen å være et guddommelig individ sier satsen at det i enhver verden vil finnes et guddommelig individ. Det er altså logisk nødvendig at det finnes guddommelige vesener.

Teorem 6.4 (Hovedteorem I) Anta XêE;2 og at X oppfyller kravene C1 -C5.
Da gjelder:

(Aw)(wêI → G(X)(w) ≠ø)

Bevis: Vi skal først vise at:

(+) G(X)(w) ≠ø → (Aw)(wêI → G(X)(w)≠ø) gitt at wêI.

Anta derfor (1) at G(X)(w)≠ø. Det følger da at det finnes x slik at (2) xêG(X)(w). Fra dette og Teorem 6.3 følger (3) Ess(G(X),x). Fra C5 følger (4) NêX(w). Fra (2) og Definisjon 6.4 kan man slutte:

(5) (Aa)(aêE;1 → ((Aw')(w'êI → xêa(w')) ↔ aêX(w))). Siden NêE;1 følger da at (6) (Aw')(w'êI → xêN(w')). Herav har man: xêN(w) og derfor i lys av Definisjon 6.3 at Ne(x). Herav: (7) (Aa)(Ess(a,x) → (Aw)(wêI → a(w)≠ø)). Fra dette og (3) følger så: (Aw)(wêI → G(X)(w)≠ø). Dette viser at (+) holder.

Fra C4 har man (8) G(X)êX(w). Fra dette og Teorem 6.2 følger (Ew)(wêI & G(X)(w)≠ø). Dette og (+) impliserer (Aw)(wêI → G(X)(w)≠ø). **QED**.

Det følgene teorem sier at den funksjonen som til enhver verden w tilordner denne g;w(X) alltid tilordner w en mengde som i høyden inneholder et element.

Teorem 6.5 Anta x,yêD & wêI. Anta XêE;2. Da gjelder:

xêg;w(X) & yêg;w(X) → x=y

Bevis: Anta forutsetningene holder og at (1) xêg;w(X) & yêg;w(X). Fra dette følger ved hjelp av Definisjon 6.4 at:

(2.1) (Aa)(aêE;1 → ((Aw)(wêI → xêa(w)) ↔ aêX(w))
(2.2) (Aa)(aêE;1 → ((Aw)(wêI → yêa(w)) ↔ aêX(w))

Herav: (Aa)(aêE;1→ ((Aw)(wêI → xêa(w)) ↔ (Aw)(wêI → yêa(w)))). Siden μ;xêE;1 følger:
(3) (Aw)(wêI → xêμ;x(w)) ↔ (Aw)(wêI → yêμ;x(w)). Etter definisjonen av μ;x har man at (Aw)(wêI → μ;x(w)={x}). Fra dette følger: (Aw)(wêI → xêμ;x(w)). Fra dette og (3) har vi så:
(Aw)(wêI → yêμ;x(w)) og derfor (Aw)(wêI → y=x). Siden I≠ø har vi da x=y. **QED**.

Teorem 6.4 ovenfor uttrykker at det er logisk nødvendig at det finnes et guddommelig vesen om X tolkes som egenskapen å være en positiv egenskap og egenskapen å være guddommelig defineres som g(X). Den følgende sats som er implisert av den foregående og Teorem 6.4 sier at det er logisk nødvendig at det finnes nøyaktig ett guddommelig individ. Denne satsen viser riktig nok ikke at dette guddommelig individ er det samme i enhver verden, men dette følger fra en annen sats vi skal vise senere, nemlig at G(X) er en konstant egenskap.

© Morten Harboe Rognes

Teorem 6.6 (Hovedteorem II) Anta XêE;2 og at X oppfyller kravene C1 -C5. Da gjelder:

(Aw)(wêI → (Ex)(G(X)(w)={x})

Det følgende teorem viser at dersom a er den vesentlige egenskapen til objektet x så er a identisk med egenskapen å være identisk med x. μ;x er nettopp egenskapen å være identisk med objektet x. Satsen viser også at den vesentlige egenskapen til et objekt x er entydig bestemt.

Teorem 6.7 Anta at aêE;1 og xêD. Da gjelder:

Ess(a,x) ↔ μ;x = a

Bevis: (a) Vi viser først at kondisjonalen mot venstre holder. Anta (1) a=μ;x. Anta for vilkårlig b at (2) bêE;1 & (Aw)(wêI → xêb(w)). Fra dette siste følger åpenbart (Aw)(wêI → {x} Inkl b(w)). Herav følger så (Aw)(wêI → μ;x(w) Inkl b(w)). I lys av definisjonen av => innebærer dette at μ;x =>b. Vi har dermed bevist:

(3) (Ab)(bêE;1 & (Aw)(wêI → xêb(w)) → μ;x =>b)

Anta på den annen side for vilkårlig b at (4) bêE;1 & μ;x => b. Fra det siste følger: (Aw)(wêI → μ;x(w) Inkl b(w)) og herav (Aw)(wêI → xê b(w)). Man har derfor:

(5) (Ab)(bêE;1 & μ;x => b → (Aw)(wêI → xê b(w))

Fra (3) og (5) følger: (Ab)(bêE;1 → ((Aw)(wêI → xêb(w)) ↔ μ;x =>b))). Fra dette og definisjonen av Ess kan vi slutte at Ess(μ;x,x). Ved hjelp av (1) følger så Ess(a,x).

(b) Dernest viser vi kondisjonalen mot venstre. Anta (6) Ess(a,x). Ved hjelp av definisjonen av Ess kan vi da slutte:

(7) (Ab)(bêE;1 → ((Aw)(wêI → xêb(w)) ↔ a =>b))). Siden a=>a og aêE;1 følger: (8) (Aw)(wêI → xêb(w)). Fra dette følger (9) (Aw)(wêI → μ;x(w) Inkl a(w)). Derfor μ;x => a. Nå har vi på den annen siden at μ;xêE;1 og (Aw)(wêI → xêμ;x). Fra dette og (7) følger derfor a =>μ;x. Men siden a =>μ;x & μ;x =>a kan vi slutte a=μ;x. **QED**.

Den følgende sats viser at egenskapen N er identisk med dn universelle egenskapen V, ie. den egenskapen hvis ekstensjon i enhver verden er hele domenet D. Dette kaster et visst lys over premissene G6 og G7. Disse er i en viss forstand overflødige dersom man anser mengden av positive egenskaper som ikke-tom. Dette siste er alleerede implisert av G5. Vi skal komme tilbake til dette i neste avsnitt. Man kan fra dette slutte at det første argumentet til Small kan forenkles betraktelig.

Teorem 6.8 Man har:

(a) (Ax)(xêD → (Ne(x) ↔ xêD))

(b) N = V

Bevis: Ad (a): Anta xêD & Ne(x). Fra Definisjon 6.3 følger da: (1) xêD. Anta på den annen side at (2) xêD. Vi ønsker å vise at (+) (Ab)(Ess(b,x) → (Aw)(wêI → b(w) ≠ø)). Anta derfor for vilkårlig b at Ess(b,x). Fra Teorem 6.7 følger da b=μ;x. Anta for vilkårlig w at wêI. Da har vi μ;x(w) = {x} og derfor at b(w) = μ;x(w)≠ø. Siden w var vilkårlig følger (Aw)(wêI → b(w)≠ø). Men siden b var vilkårlig element slik at Ess(b,x) følger det at (+) holder.

Fra (2) og (+) følger så Ne(x).

© Morten Harboe Rognes

Ad (b). Anta wêI for vilkårlig w. Da har vi ved hjelp av Definisjon 6.3 og 6.5 og punkt (a) ovenfor at xêN(w) ↔ Ne(x) ↔ xêD ↔ xêD & x=x ↔ xêV(w) gjelder for alle x. Det følger at N(w)=V(w). Men siden w var vilkårlig har vi (Aw)(wêI → N(w)=V(w)). Fra dette følger åpenbart N=V. **QED**.

Bemerkning: Man ser lett at om a er en egenskap, ie. aêE;1 så har man at a =>V. Enhver egenskap er altså slik at dets ekstensjon i enhver verden w er inkludert i D og derfor i V(w). Dette innebærer i lys av Teorem 7.8 at blandt betingelsene C1 - C5 er egentlig C5 overflødig og kan utledes fra C3 og C4. Dette i sin tur skulle innebære at vi skulle kunne utlede vårt første hovedteorem, Teorem på en mer direkte måte og uten at man tar omveien om Teorem 6.3. Det er ikke så vanskelig å se hvordan dette kan gjøres: Med utgangspunkt i definisjonen av G(X) er det ganske lett å vise at (1) (Aw)(Aw')(w,w'êI → G(X)(w)= G(X)(w')). Man ser altså at egenskapen G(X) har den samme ekstensjon i alle verdener. Det representerer det man kunne kalle en *konstant* eller *rigid* egenskap. Men fra (1) utleder man lett

(2) (Ew)(wêI & G(X)≠ø) → (Aw)(wêI → G(X)≠ø).

Men fra Teorem 6.2 og C4 følger at (Ew)(wêI & G(X)(w)≠ø). Fra dette og (2) følger så (Aw)(wêI → G(X)(w)≠ø)

Det er ingen helt opplagt sak at det finnes en egenskap av annen orden, XêE;2, som oppfyller kravene C1 - C5. I det følgende skal vi vise at det for enhver xêD er mulig å konstruere en slik egenskap X. Dette er imidlertid en konsekvens av de følgende to teoremer:

Teorem 6.9 Anta (i) XêE;2 & wêI. Anta (ii) xêg;w(X) & xêD og forutsett til slutt at
(iii) (Aw)(Aw')(w,w'êI → X(w) = X(w')
Da har vi: X(w) = Mg(a: aêE;1 & μ;x => a)

Bevis: Anta forutsetningene (i) - (iii) holder. Fra den andre forutsetningen og Definisjon 6.4 følger at : (1) xêD & (Aa)(aêE;1→ ((Aw)(wêI→xêa(w)) ↔ aêX(w))). Vi viser først inklusjonen mot høyre i konsekventen i teoremet: Anta for vilkårlig a at (2) aêX(w). Fra dette følger aêE;1 og derfor ved hjelp av (1) at (3) (Aw)(wêI→xêa(w)). Det vil være tilstrekkelig å vise at μ;x => a. Anta derfor for vilkårlig w at (4) wêI. Da har vi ikraft av definisjonen av μ at (4) μ;x(w) ={x}. Fra (3) og (4) følger xêa(w) og derfor {x} Inkl a(w). Fra dette og (4) følger μ;x(w) Inkl a(w). Siden w var et vilkårlig element i I har vi vist:

(Aw)(wêI → μ;x(w) Inkl a(w)). Men dette impliserer at μ;x => a ved hjelp av definisjonen av =>.

Vi tar dernest for oss inklusjonen mot venstre. Anta for vilkårlig a at
(5) aêE;1 & μ;x =>a. Ved hjelp av definisjonen av => har vi da
(6) (Aw)(wêI → μ;x(w) Inkl a(w)). Ved hjelp av definisjonen av μ følger:
(7) (Aw)(wêI → μ;x(w) = {x}). Fra dette og (6) følger: (Aw)(wêI → xêa(w)). Siden Siden aêE;1 følger derfor ved hjelp av (1) at aêX(w). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Teorem 6.10 Anta (i) XêE;2 & wêI. Anta videre (ii) (Aw)(Aw')(w,w'êI → X(w) = X(w') og (iii) xêD. Anta tilslutt at (iv) X(w) = Mg(a: aêE;1 & μ;x => a)
Da har vi at X oppfyller kravene C1 - C5 nevnt i Teorem 6.1

Bevis: Anta forutsetningene (i) - (iv) holder.

(a) Vi viser først at X oppfyller kravet C1. Anta aêE;1 og aêX(w). Anta w'êI for vilkårlig w'. Siden wêI ifølge forutsetning (i) har vi ved hjelp av forutsetning (ii) at

© Morten Harboe Rognes

X(w)=X(w'). Det følger selvfølgelig at aêX(w'). Siden w' var vilkårlig følger et at vi har vist (Aw')(w'êI → aêX(w')). Anta på den annen siden at (Aw')(w'êI → aêX(w')). Da følger umiddelbart at aêX(w) siden wêI ifølge forutsetning (i). Vi har dermed vist at X oppfyller kravet C1.

(b) Dernest viser vi at X oppfyller kravet C2. Anta (1) aêE;1 & w'êI for vilkårlig w'. Anta for reduktio ad absurdum at (2) aêX(w') & Neg(a)êX(w'). Da følger ved hjelp av forutsetning (ii) og (iv) at (3) μ;x =>a & μ;x => Neg(a). Fra dette følger i sin tur ved hjelp av definisjonene av μ, => og operasjonen Neg :

(4.1) (Aw)(wêI → xêa(w)) og

(4.2) (Aw)(wêI → xê(D-a(w)))

nå har vi at I≠ø og at det derfor finnes w"êI. Fra dette, (4.1) og (4.2) følger xêa(w") & xê(D-a(w)). Dette er åpenbart absurd. (2) er altså umulig. Vi har derfor: (Aw)(Aa)(wêI & aêE;1 →. aêX(w) → ¬(Neg(a)êX(w)).

(c) Det er nødvendig å vise at X oppfyller kravet C3. Anta derfor for vilkårlige elementer w,a og b at (1) wêI & a,bêE;1. Anta videre at (2) aêX(w) & a=>b. Fra (2) følger ved hjelp av forutsetning (iv) at μ;x =>a. Men man verifiserer lett at => er en transitiv relasjon. Siden vi etter (2) har a=>b følger at μ;x =>b. Siden bêE;1 har vi derfor bêX(w). Dette viser at C3 holder.

(d) Vi har tidligere vist at N = V. Det er dessuten klart at VêE;1. Nå har vi etter definisjonen av V at (Aw)(wêI → V(w)=D). Det følger herav ved hjelp av forutsetning (iii) at

(Aw)(wêI → xêV(w)) og derfor at (Aw)(wêI → μ;x(w) Inkl V(w)). herav følger μ;x => V. Siden VêE;1 og N=V har vi derfor VêX(w) ved hjelp av forutsetning (iv). Dette viser at X oppfyller kravet C5.

(e) Det gjenstår å vise at X oppfyller kravet C4, med andre ord må vi vise at G(X)êX(w). Det vil åpenbart være nok å vise: (1) G(X) = μ;x , siden μ;xêX(w) i lys av forutsetning (iv). For å vise (1) vil det i sin tur, når man studerer definisjoonen av G(X), være tilstrekkelig å bevise: (2) (Aw)(wêI → g;w(X) = {x}). Anta for vilkårlig w at (3) wêI. Fra forutsetning (iii) har vi xêD. For å vise at xg;w(X) vil det derfor i lys av Definisjon 6.4 være tilstrekkelig å vise: (4) (Aa)(aêE;1 → ((Aw)(wêI →xêa(w)) ↔ aêX(w))). (I) Anta aêE;1 & (Aw)(wêI →xêa(w)). Fra dette følger ved hjelp av definisjonene av μ og => at μ;x =>a. Fra dette og forutsetning (iv) følger aêX(w). (II) Anta aêX(w) & aêE;1. Fra forutsetning (iv) følger da aêE;1 & μ;x =>a. Men μ;x=>a impliserer (Aw)(wêI →xêa(w)).

Det vi har vist under (I) og (II) viser at (4) holder. Dermed har vi vist (5) {x} Inkl g;w(X). Fra Teorem 6.5 følger (Ax)(Ay)(xêg;w(X) & yêg;w(X) → x=y) gitt forutsetningene i den satsen vi nå gir bevis for. Det følger fra dette og (5) at (6) g;w(X) = {x}. Dette viser at (2) holder og derfor at X oppfyller kravet C4.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

μ;x er den egenskapen som til enhver verden tilordner enhetsmengden som inneholder x, det vil si {x}. Vi har altså at μ;x = Mg(<w,{x}>: wêI). Er X en konstant egenskap ved egenskaper og defineres a som det individet x som er med i ekstensjonen til G(X) i en eller annen verden sier den følgende sats at G(X) er identisk med μ;a

Teorem 6.11 Anta (i) XêE;2 og at (ii) (Aw)(Aw')(w,w'êI → X(w)=X(w')). Sett pr. definisjon: (iii) a = (ix)((Ew)(wêI & xêG(X)(w))). Da har man:

G(X) = μ;a

© Morten Harboe Rognes

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Fra en tredje forutsetningen kan man slutte:

(1.1) (Ew)(wêI & aêG(X)(w))

(1.2) (Ax)((Ew)(wêI & xêG(X)(w)) → x=a)

Fra (1.1) følger det at det finnes w0 slik at (2) w0êI & aêG(X)(w0). Vi skal vise at G(X) = μ;a. I lys av definisjonen av identitet mellom attributter er det tilstrekkelig å vise:

(+) (Aw)(wêI → G(X)(w) = μ;a(w)). Siden man har: (Aw)(wêI →μ;a(w)={a}) vil det være tilstrekkelig å bevise: (++) (Aw)(wêI → G(X)(w) = {a}). Vi skal først vise (3) (Aw)(Aw')(w,w'êI → G(X)(w) = G(X)(w')). Anta w,w'êI da har man G(X)(w)= g;w(X) og G(X)(w') = g;w'(x) ved hjelp av definisjonen av G. Ved hjelp av Teorem 6.1 følger da G(X)(w) = G(X)(w'). Dette viser at (3) holder. La oss så bevise (++). Anta for vilkårlig w at (4) wêI. Fra dette, (2) og (3) følger: G(X)(w) = G(x)(w0). Fra dette og den andre konjunkten i (2) følger så aêG(X)(w) og derfor at (5) {a} Inkl G(X)(w). Anta nå at xêG(X)(w) for vilkårlig x. Siden wêI følger da (Ew)(wêI & xêG(X)(w)). Herav har vi ved hjelp av (1.2) at x=a og derfor at xê{a}. Vi har derfor, siden x var vilkårlig at (6) G(X)(w) Inkl {a}. Fra (5) og (6) følger G(X)(w)={a}. Dette viser at (++) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Den følgende sats er viktig. Den sier at dersom X er en konstant egenskap av annen orden vil det at ekstensjonen til G(X) i enhver verden er ikke-tom være ekvivalent med at X oppfyller kravene C1-C5. Dette siste er i sin tur ekvivalent med at det finnes et individ x i D slik ekstensjonen til X i enhver verden w er identisk med alle de egenskapene a som er implisert av μ;x.

Teorem 6.12 (Ekvivalensteorem) Anta XêE;2 & wêI og at (Aw)(Aw')(w,w'êI → X(w) = X(w'). Da har man at følgende betingelser er ekvivalente:

(i) (Aw)(wêI → G(X)(w) ≠ø)

(ii) X oppfyller kravene C1 - C5

(iii) (Ex)(xêD & (Aw)(wêI → X(w) = Mg(a: aêE;1 & μ;x => a)

Bevis: Anta at de to forutsetningene holder. Vi skal vise at (i) impliserer (iii) og (iii) impliserer (ii). Dette vil være tilstrekkelig for å vise at de tre betingelsene er ekvivalente siden vi tidligere har gitt bevis for Teorem 6.4 som innebærer at (ii) impliserer (i).

(a) Vi gir et bevis for at (i) impliserer (iii). Anta (1) (Aw)(wêI → G(X)(w) ≠ø). Siden I≠ø må det finnes (2) w0êI og derfor i lys av (1) en at det finnes x slik at (3) xêG(X)(w0). Fra dette og definisjonen av G følger (4) xêg;w0(X). Fra forutsetningene i satsen, (2),(4) og Teorem 6.9 følger (5) X(w0)= Mg(a: aêE;1 & μ;x => a). Anta nå for vilkårlig w at wêI. Fra dette, (2) og den andre forutsetningen i satsen følger: X(w)=X(w0). I lys av (5) har vi derfor:

(Aw)(wêI → X(w)= Mg(a: aêE;1 & μ;x => a).

Det følger at

(Ex)(xêD & (Aw)(wêI → X(w)= Mg(a: aêE;1 & μ;x => a)).

(b) Vi viser at (iii) impliserer (ii). Anta forutsetningene i satsen holder. Fra (iii) har vi at det finnes x slik at (1) xêD & (Aw)(wêI → X(w)= Mg(a: aêE;1 & μ;x => a). Siden I≠ø følger at det finnes w0 slik at (2) w0êI. Fra dette og (1) følger:

(3) X(w0) = Mg(a: aêE;1 & μ;x => a) Fra (1), (2), (3) og Teorem 6.10 følger så (ii). Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED**.

La x være et individ i D. Ser man da på den egenskapen som er snittet av alle de egenskapene

© Morten Harboe Rognes

som er implisert av μ;x ser man fra det følgende teorem at denne egenskapen er identisk med μ;x selv.

Teorem 6.13 Anta xêD Da gjelder:
SNe(Mg(a: aêE;1 & μ;x => a)) = μ;x

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å vise at ekstensjonen til SNe(Mg(a: aeE,1 & μ;x => a)) sammenfaller med den til μ;x i enhver verden. Ekstensjonen til μ;x er imidlertid {x} uansett verden. Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at

(1) (Aw)(wêI → SNe(Mg(a: aeE,1 & μ;x => a))(w) = {x}). Anta w er et vilkårlig element i I. Vi skal vise: (2) SNe(Mg(a: aeE,1 & μ;x => a))(w) = {x}. Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre: Anta for vilkårlig y at (3) yê SNe(Mg(a: aeE,1 & μ;x => a))(w). Ved hjelp av definisjonen av operasjonen SNe kan man da slutte:

(4) (Aa)(aeE,1 & μ;x => a → yêa(w)). Siden μ;xêE;1 kan vi instansiere med hensyn på μ;x i (4) og får da (5) yêμ;x(w) siden det åpenbart er tilfelle at μ;x =>μ;x. Men (5) impliserer yê{x} i lys av definisjonen av μ;x. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (2) holder.

La oss så ta for oss inklusjonen mot venstre: Anta yê{x}. Da har man yêμ;x(w) ved hjelp av definisjonen av μ;x. Anta nå at a er et vilkårlig objekt der vi har (6) aêE;1 & μ;x =>a. Fra den siste konjunkten i (6) følger μ;x(w) Inkl a(w). Men siden yêμ;x(w) har vi da yêa(w). Siden a var vilkårlig følger: (Aa)(aêE;1 & μ;x => a → yêa(w)). Fra dette og definisjonen av SNe følger så: yêSNe(Mg(a: aeE,1 & μ;x => a))(w). Dette viser at inklusjonen mot venstre holder. **QED**.

De resterende teoremer i dette avsnittet har som konsekvent at det er logisk umulig at det kan finnes noe objekt har egenskapen G(X).

Den første satsen, nemlig Teorem 6.14 nedenfor, sier at dersom X er en konstant egenskap av annen orden og den universelle egenskapen V ikke er med i ekstensjonen til X i en eller annen verden vil ekstensjonen til G(X) være tom i enhver verden. Tenker vi oss at vi her for X setter inn Psv*, egenskapen å være en positiv egenskap, og oppfatter G(Psv*), slik som det gjøres i Smalls argument, som egenskapen å være et guddommelig vesen følger det at det er logisk umulig at det finnes guddommelige vesener om den universelle egenskapen er positiv. Dette spenner ikke direkte ben under det første argumentet til Small. Men det gir den som vil definere egenskapen å være et guddommelig vesen som G(Psv*) noe å tenke på. Vi kommer tilbake til dette i neste avsnitt.

Teorem 6.14 Anta (i) XêE;2 & wêI og (ii) (Aw)(Aw')(w,w'êI → X(w) = X(w'). Anta en mer at (iii) ¬(Vê X(w)). Da har man at følgende holder:
¬(Ew)(wêI & (Ex)(xêG(X)(w))

Kommentar: Anta X representerer egenskapen *å være en positiv egenskap*. Da vil G(X) være egenskapen å være et individ hvis nødvendige egenskaper er nøyaktig de og bare de egenskaper som er positive. Satsen sier da at dersom den universelle egenskapen V ikke er en positiv egenskap, er det logisk umulig at det finnes noe som har egenskapen G(X) i en eller annen verden.

Bevis: Anta forutsetningene (i) - (iii) holder. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w0 og x0 slik at (1) w0êI & x0êG(X)(w0). Fra (1) og definisjonen av G(X) følger:

© Morten Harboe Rognes

(2) x0êD & (Aa)(aêE;1 → ((Aw)(wêI → x0êa(w)) ↔ aêX(w0)))

Det skulle være opplagt fra definisjonene av V og E;1 at VêE;1 og at

(Aw)(wêI → x0êV(w)).

Fra dette og (2) følger VêX(w0). Siden w0êI og wêI ifølge forutsetning (i) har vi ved hjelp av forutsetning (ii) at X(w0)= X(w). Det følger at VêX(w). Dette er imidlertid utelukket på grunn av forutsetning (iii). Det følger at det ikke kan finnes w0 og x0 slik at (1) holder. **QED**.

Det følgende teorem er også av relevans når det gjelder en vurdering av premissene i det første argumentet til Small. Anta X er en konstant egenskap av annen orden. Da vil ekstensjonen til w i enhver verden være den samme mengden av egenskaper av første orden. Satsen nedenfor sier da at om X(w) ikke er lukket under implikasjon vil ekstensjonen til egenskapen G(X) være tom i enhver verden. Tenker vi oss at vi her lar X være egenskapen å være en positiv egenskap, Psv*, og at vi definerer egenskapen å være et guddommelig vesen ved G(Psv*) sier satsen at dersom mengden av positive egenskapeer ikke er lukket under implikasjon er det logisk umulig at det finnes et guddommelig vesen. Det er nærliggende å trekke den slutning at man gi ganske sterke argumenter mot eksistensen av guddommelige vesener i den forstand som forutsettes i Small første argument. Også dette forhold vil bli nærmere diskutert i den neste paragrafen.

Teorem 6.15 Anta (i) XêE;2 & wêI og (ii) (Aw)(Aw')(w,w'êI → X(w) = X(w'). Anta en mer at (iii) (Ea)(Eb)(a,bêE;1 & aêX(w) & a=>b & ¬(bêX(w)). Da har man:

¬(Ew)(wêI & (Ex)(xêG(X)(w)))

Bevis: Anta forutsetningene (i) - (iii) holder. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w0 og x0 slik at (1) w0êI & x0êG(X)(w0). Fra (1) og definisjonen av G(X) følger:

(2) x0êD & (Aa)(aêE;1 → ((Aw)(wêI → x0êa(w)) ↔ aêX(w0)))

Fra den tredje forutsetningen følger det at det finnes a,b slik at

(3) a,bêE;1 & aêX(w) & a=>b & ¬(bêX(w)

Siden w0,w êI i lys av (1) og forutsetning (i), følger det ved hjelp av forutsetning (ii) at (4) X(w) = X(w0). Fra (2), (3) og (4) kan man slutte : (Aw)(wêI → x0êa(w)). Siden a=>b følger videre (5) (Aw)(wêI → x0êb(w)). Fra den siste konjunkten i (3) sammen med (4) har vi: ¬(bêX(w0)). Siden bêE;1 følger derfor ved hjelp av (2) at ¬(Aw)(wêI → x0êb(w)). Dette strider åpenbart mot (5). Det følger at det ikke kan finnes x0 og w0 slik at (1) holder. **QED**.

Vår siste sats i dette avsnittet viser også til visse bizarre sider ved det første argumentet til Small. To egenskaper av første orden sies å være uforenelige om det i hver verden er slik at deres ekstensjoner er disjunkte. Satsen nedenfor sier at dersom X er en konstant egenskap ved egenskaper og a,b er er uforenelige egenskaper som er er med i ekstensjonen til X i en eller annen verden w så er det logisk umulig at det kan finnes noe individ som har egenskapen G(X). Hvis vi her tenker oss at X er Psv*, egenskapen å være en positiv egenskap impliserer satsen at dersom det finnes uforenelige positive egenskaper er det logisk umulig at det kan finnes noe individ med egenskapen G(Psv*), dvs. noe individ som er guddommelig. Igjen kan det nevnes at vi skal komme tilbake til dette forhold i neste avsnitt.

Teorem 6.16 Anta (i) XêE;2 & wêI og (ii) (Aw)(Aw')(w,w'êI → X(w) = X(w'). Anta enn mer at følgende holder:

(iii) a,bê X(w) & (Aw)(wêI →a(w)Ω b(w) =ø)

Da har man:

© Morten Harboe Rognes

¬(Ew)(wêI & (Ex)(xêG(X)(w))

Bevis: Anta forutsetningene (i) - (iv) holder. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w0 og x0 slik at (1) w0êI & x0êG(X)(w0). Fra (1) og definisjonen av G(X) følger da:

(2) x0êD & (Aa)(aêE;1 → ((Aw)(wêI → x0êa(w)) ↔ aêX(w0)))

Siden w0,wêI i lys av (1) og forutsetning (i) følger det ved hjelp av forutsetning (ii) at (4) X(w) = X(w0). Fra dette og det at a,b êX(w) følger (5) a,b êX(w0). Siden X(w) for alle wêI er inkludert i E;1 følger (6) a,bêE;1. Fra (2), (5) og (6) kan vi slutte :

(7) (Aw)(wêI → x0êa(w)) & (Aw)(wêI → x0êb(w)). Siden w0êI følger herav:

(8) x0êa(w0) & x0êb(w0). Men dette og det at w0êI strider mot forutsetning (ii).

Det følger at det ikke kan finnes x0 og w0 slik at (1) holder. **QED**.

§6.1 Kritiske bemerkninger i forbindelse med det første argumentet Small presenterer.

Det er ytterst tvilsomt om noen umiddelbart vil akseptere det argumentet som har blitt presentert ovenfor til fordel for at det er nødvendig at det finnes nøyaktig ett guddommelig vesen. Vi skal i dette avsnitt se på endel betenkeligheter man kan ha i denne forbindelse

Det er et karakteristisk trekk ved argumentet at man tar for gitt at det finnes en klasse med egenskaper som er positive. Man tar det for gitt at dette er en veldefinert egenskap. Det er ingen opplagt sak. Man kunne formode at det ville bli lettere å vurdere holdbarheten av premissene i argumentet, spesielt premissene G2 og G3, om man hadde en definisjon av hva som menes med "positiv egenskap". Noe slikt gis ikke i forbindelse med argumentet. Det fremtrer derfor som noe ubestemt. Dette er naturligvis ikke noen avgjørende innvending.

Man kunne hevde at våre intuisjoner om hva som har positiv og negativ verdi primært er knyttet til saksforhold, og at en teori om positive og negative egenskaper derfor må knyttes til en lære om verdien til saksforhold. Det virker naturlig å tenke seg at utsagn beskriver saksforhold, og det virker derfor rimelig å tenke seg at utsagn kan beskrive forhold som har større eller mindre verdi i seg selv. En nærliggende tanke er da at mengden av utsagn fra en verditeoretisk synsvinkel kan inndeles i tre disjunkte mengder som samlet uttømmer hele mengden, nemlig de utsagn som beskriver saksforhold som har positiv indre verdi, de utsagn som beskriver forhold som har negativ indre verdi, og de utsagn som beskriver saksforhold som hverken har positiv eller negativ indre verdi. Naturligvis er det også naturlig å innføre en gradering av utsagnene slik at man kan snakke om at et utsagn beskriver et forhold som har større verdi i seg selv enn et annet. Blandt alle de saksforhold som for eksempel har negativ verdi i seg selv vil det åpenbart være noen som har langt større negativ verdi enn andre. Når det gjelder de positive saksforhold gjelder naturligvis det samme. Man kunne nå oppfatte disse begrepene som mer grunnleggende og forsøke å definere hva som menes med en positiv egenskap ved hjelp av dem. En egenskap f kunne kalles for en positiv egenskap hvis og bare hvis utsagnet at x er i besittelse av egenskapen f beskriver et positivt saksforhold for alle verdier av x.

Hvis man definerer positiv egenskap på denne måten virker imidlertid ikke premissen G2 særlig plausibel. Selvom alle utsagn av typen f(x) beskriver positive forhold er det ingen opplagt ting at alle utsagn av typen g(x) også beskriver positive saksforhold, selvom egenskapen g er implisert av egenskapen f. En ting som kan nevnes i denne forbindelse er dette: La t være det nødvendig sanne utsagn, det vil si det utsagn som er sant i absolutt alle

© Morten Harboe Rognes

logisk mulige verdener. Det virker direkte merkverdig å si at dette utsagn beskriver noe som har positiv indre verdi. Det virker også like besynderlig å si at utsagnet beskriver et forhold som har negativ verdi i seg selv. Men det er implisert av ethvert utsagn som beskriver noe positivt.

Dette innebærer at dersom for eksempel g er egenskapen å være identisk med seg selv kan denne ikke ikke være noen positiv egenskap. For alle instanser av den vil være det nødvendig sanne utsagn. Er f derfor en positiv egenskap vil det nødvendigvis være slik at enhver gjenstand som har denne egenskapen er identisk med seg selv, det vil si har egenskapen g. Egenskapen å være identisk med seg selv er altså implisert av f. Dette innebærer at det finnes positive egenskaper som impliserer egenskaper som ikke er positive. Fra dette følger at G2 er uholdbar. Det er ingen grunn til å tro at en rimelig formulert generell aksiologi skulle implisere noen prinsipper av typen G2 uansett hvordan man definerer positiv egenskap.

Før vi går videre med flere kritiske innvendinger mot premissene i argumentet vil vi nevne noen andre forhold.

Det bør for det første bemerkes at premissene G6 og G7 egenlig er overflødige selvom de benyttes i beviset som gis i §5. Dette er egentlig ikke så merkverdig som det kan virke ved første øyekast. Man ser fra den semantiske analysen av aksiomene ovenfor at G6 er en definisjon av Ne og at denne premissen egentlig ikke innebærer noe annet enn at $V(Ne) = V$. V er den universelle egenskapen, den konstante egenskapen hvis ekstensjon i enhver verden er allmengden, dvs. i vårt tilfelle D. Syntaktisk sett har vi at V er det attributtet g som er slik at $Nec((Ax)(g(x) \leftrightarrow x=x)$. Men den entydige eksistens av en sådan egenskap g kan utledes ved hjelp av identitetsaksiomene og komprenhensjonsaksiomene C1-C2 i S5*. Man skulle forvente at vi i S5* skulle kunne vise at $Nec((Ax)(Ne(x) \leftrightarrow x=x)$. Men det følger da at egenskapen Ne er implisert av enhver egenskap. Siden premissen G5 sier at Gu er en positiv egenskap skulle man derfor ved hjelp av G2 og G5 kunne utlede at Nec(Psv(Ne)). Dette fremgår også helt klart av den semantiske analysen vi har gitt ovenfor.

Man kan altså vise at K kan utledes bare fra G1 - G5. Dette er det faktisk mulig å gi et syntaktisk bevis for. Grunnen til at dette er mulig er at egenskapen Gu, egenskapen å være en guddommelig egenskap, kan vises å være en konstant egenskap. Man kan faktisk vise, uten at man bruker noe annet enn G1 samt aksiomene og slutningsreglene i S5* at man har

$$\vdash Nec[(Af)(Nec(f(x) \leftrightarrow Psv(f)) \leftrightarrow Nec((Af)(Nec(f(x) \leftrightarrow Psv(f)))]$$

Men siden G4 sier at $Nec((Ax)(Gu(x) \leftrightarrow (Af)(Nec(f(x) \leftrightarrow Psv(f)))$ følger det at man ved hjelp av denne definisjonen kan utlede $Nec((Ax)(Gu(x) \leftrightarrow Nec(Gu(x)))$. Dette innebærer at egenskapen å være et guddommelig vesen har den samme ekstensjon i enhver verden. Siden vi ved hjelp av G5 og premissene G1-G3 kan utlede at det er logisk mulig at det finnes et guddommelig individ følger det at Gu må ha en ikke-tom ekstensjon i en eller annen verden. Men da må det også ha en ikke-tom ekstensjon i alle verdener. Med andre ord er det nødvendig at det finnes et guddommelig vesen. Beviset i §5 for entydigheten til dette vesen benytter ikke premissene G6 og G7. Det kan derfor beholdes. Man ser altså at det argumentet som Small presenterer kan forenkles betraktelig.

At et argument inneholder overflødige premisser innebærer selvfølgelig ikke at det er galt. Det innbærer bare at det kan skjerpes. Men i dette tilfellet er en forenkling kjærkommen siden G6 er relativt komplisert. Det er nærmest umulig å se hva denne premissen egentlig sier uten å gjennomføre ganske kompliserte resonnementer.

En annen sak som bør bemerkes er den følgende: Man kan i nærvær av premissene G1,G4

© Morten Harboe Rognes

og G5 vise at påstanden at det er logisk nødvendig gud eksisterer er ekvivalent med premissene G2 og G3. Man kan altså i S5* bevise at det følgende er et teorem:

(1) |- G1& G4 &G5 → (Nec((Ex)Gu(x)) ↔ G2 & G3)

Ovenfor, i §5, viste vi den ene halvdelen av dette nemlig at G1 - G5 impliserer Nec((Ex)Gu(x)). Men at man også har

(2) |- G1& G4 &G5 & Nec((Ex)Gu(x)) →. G2 & G3

viste vi ikke. Man kan også skjerpe denne sats fordi vi fra G1 kan utlede, som vi nevnte ovenfor, at Nec((Ax)(Gu(x) ↔ Nec(Gu(x))). Fra dette følger at dersom Pos((Ex)Gu(x)) så har man Pos((Ex)Nec(Gu(x)). Men vi har Nec[(Ex)Nec(Gu(x)) → Nec((Ex)Gu(x))]. Derfor kan vi konkludere med Pos(Nec((Ex)G(x)) og følgelig Nec((Ex(Gu(x)). Man kan altså vise:

(3) |- G1 & G4 → Pos((Ex)Gu(x)) → Nec(Ex)Gu(x))

Men fra (2) og (3) følger

(4) G1& G4 &G5 & Pos((Ex)Gu(x)) →. G2 & G3

Aksepterer man derfor premissene G1, G4 og G5 og kan vise at enten G2 eller G3 ikke holder følger det at det er logisk umulig at gud eksisterer.

La oss derfor argumentere noe mer detaljert for (2). Vi har at G4, som nevnt, innebærer at (5) Nec((Ax)(Gu(x) ↔ (Af)(Nec(f(x)) ↔ Psv(f))). Anta (6) Nec((Ex)Gu(x)). Anta videre at (7) Psv(f) & f=>g med det for øye å bevise Psv(g). Fra (5) følger:
(8) (Ax)(Gu(x) ↔ (Af)(Nec(f(x)) ↔ Psv(f)) Fra dette og (7) følger videre
(9) (Ax)(Gu(x) → Nec(f(x)). Fra (8) har vi imidlertid også
(10) (Ax)(Gu(x) → Nec(g(x)) → Psv(g)). Nå følger per definisjon fra f=>g at følgende er tilfelle : Nec((Ax)(f(x) → g(x)). Det er klart at dette sammen med (9) og (10) gir oss:
(Ax)(Gu(x) → Psv(g)). Men fra dette og (6) følger Psv(g). Man har altså at (5) og (6) impliserer (Af)(Ag)(Psv(f) & f=> g → Psv(g)). Men da må disse to premissene også implisere Nec[(Af)(Ag)(Psv(f) & f=> g → Psv(g))]. Dette er ikke noe annet enn G2.

Anta nå fremdeles at (8) og (6) holder. Vi ønsker å utlede G3. Anta derfor for reduktio ad absurdum: (13) Psv(f) & Nec((Ax)(g(x) ↔ ¬(f(x))) & Psv(g). Fra dette og (8) følger Følger imidlertid (Ax)(Gu(x) → Nec(f(x) & g(x)). Men fra dette og (6) kan man slutte at (Ex)Nec(f(x)&g(x)). Dette strider åpenbart mot den andre konjunkten i (13). Dette viser at (5) og (6) også impliserer G3.

Dette skulle tydelig vise at (2) ovenfor holder.

Det er imidlertid ytterligere noen kommentarer man kan komme med her. Vi har nå sett at (4) ovenfor er et teorem i S5*. Denne formuleringen er imidlertid ekvivalent med:

(5) G1& G4 &G5 & ¬(G2 & G3) →. Pos((Ex)Gu(x))

Det er mulig at antesedenten her er langt mer plauibel enn premissene i det argumentet som Small legger frem. G1 - G5 virker ikke spesielt uplausible. Heller ikke virker det spesielt søkt å betvile en av premisene G2 eller G3. Begge kan virke uplausible. Men som man ser følger det da at det er logisk umulig at det kan finnes noe guddommelig vesen. Litt spøkefullt kunne

© Morten Harboe Rognes

man si at vi har transformert en versjon av Gödels bevis for Guds nødvendighet til et "bevis" for Guds umulighet.

Det er imidlertid ytterligere et argument som man bør ta i betraktning. Som nevnt tidligere kan man vise at det må finnes en første-ordens egenskap g slik at Nec((Ax)(g(x) ↔ x=x)). Man ser lett at denne egenskapen g er entydig bestemt og at det dreier seg om det vi vil kalle den universelle egenskapen, dvs. den egenskapen som enhver ting har i enhver verden. g er med andre ord den egenskap hvor ekstensjonen i enhver verden er all-mengden, dvs. D. Man kan nå vise at følgende holder:

(14) G1 & G4 & Pos((Ex)Gu(x)) & Nec((Ax)(g(x) ↔ x=x)) → Psv(g)

Argumentet til fordel for dette er det følgende: Anta at antesedenten i (14) holder. Fra de tre første konjunktene i denne antesedenten følger ved hjelp av (3) ovenfor at
(15) Nec((Ex)Gu(x)). Fra G4 har vi (16) Nec((Ax)(Gu(x) ↔ (Af)(Nec(f(x)) ↔ Psv(f))))
Fra den fjerde konjunkten i antesedenten følger: (17) (Ax)(Nec(x=x) → Nec(g(x))). I kraft av identitetsaksiomene i S5* har vi (18) (Ax)Nec(x=x). Fra (16) følger naturligvis:
(19) (Ax)(Gu(x) →(Af)(Nec(f(x)) → Psv(f))). Herav har man, som man lett innser:
(20) (Ax)(Gu(x) →Nec(g(x)) → Psv(g))). Fra (17), (18) og (20) følger
(Ax)(Gu(x) → Psv(g)). Men fra dette og (15) følger Psv(g). Dette viser at (14) holder.

Fra (14) kan man så utlede:

(21) G1 & G4 & (Ag)(Nec((Ax)(g(x) ↔ x=x)) → ¬Psv(g)) → ¬Pos((Ex)Gu(x))

Dette sier at dersom G1 og G4 holder og den universelle egenskapen ikke regnes som en positiv egenskap så er det logisk umulig at det kan finnes noe guddommelig vesen. Siden premissene i dette argumentet ikke ved første øyekast virker særlig urimelige kan man også i dette se et argument for Guds umulighet.

Naturligvis er det ikke noe bindende i dette. Man kan unngå dette ved for eksempel å hevde at G4, som egentlig er en definisjon av hva som menes med et guddommelig vesen, ikke er riktig. Man kan forsette med å hevde at gud er et helt igjennom godt vesen, men den godhet som det her dreier seg om er ikke det samme som snittet av alle gode egenskaper.

Fra overveielsene ovenfor fremgår det at det første argumentet til Small i høy grad avhenger av premissene G2 og G3. Kan finne gode grunner for å benekte dem taper ikke bare dette første argumentet som Small gjør rede for, meget av sin overbevisningskraft, men man til og med si at det i noen grad viser at det er logisk umulig at det finnes noe guddommelig vesen hvis man aksepterer G1 og G4. Det kan derfor være rimelig å drøfte disse to premissene detaljert og uten at man trekker inn overveielsene ovenfor.

La oss først ta for oss G3. Som man ser sier denne premissen at dersom f er en positiv egenskap kan ikke negasjonen av denne egenskap være positiv. Dette innebærer ikke direkte at dersom f og g er to logisk uforenelige egenskaper, dvs. har disjunkte ekstensjoner i enhver verden, så kan ikke begge være positive. Men i nærvær av G2 kan man slutte at dette er tilfelle. For anta f er en positiv egenskap og at g er en positiv egenskap som er logisk uforenelig med f. Da vil g implisere negasjonen av f som så i lys av G2 vil være en positiv egenskap. Det følger at både f og negasjonen av f i så fall vil være positive egenskaper. Dette strider mot G3.

Er det mulig å gi eksempler på logisk uforenelige egenskaper som er positive? Det er

© Morten Harboe Rognes

nærliggende å gi et bekreftende svar på grunnlag av overveielser av den følgende art:

Egenskapen å være et vennlig vesen er åpenbart en positiv egenskap. Men hvis dette er en positiv egenskap kan det virke nærmest ubegripelig hvorfor ikke egenskapen å være en vennlig kvinne også skulle være en positiv egenskap. Men hvis egenskapen vennlighet er positiv hvorfor skulle ikke da også egenskapen å være et vennlig ikke-kvinnelig vesen være en positiv egenskap? Positive egenskaper ved hunder, katter, menn eller andre "husdyr" bør vel regnes som positive? Konklusjonen synes å være at egenskapen å være en vennlig kvinne såvel som den uforenelige egenskapen å være et vennlig ikke-kvinnelig vesen begge er positive egenskaper. Dette faktum sammen med G2 impliserer at G3 ikke holder. Eksistensen av logisk uforenelige positive egenskaper er forøvrig katastrofalt for Guds eksistens om man definerer guddommelighet ved hjelp av G4. Hvis de to nevnte egenskaper er positive må det være et vesenstrekk ved et guddommelig vesen at det såvel er kvinnelig som ikke-kvinnelig. Man bør bemerke at dette eksemplet ikke bare kaster et uheldig lys over G3, men helt uavhengig av G2 og G3 kan få en til å tvile på adekvansen til en definisjon av guddommelighet av den typen som er eksemplifisert ved G4.

La oss dernest se nærmere på G2. Som det fremgår av det vi tidligere har sagt sier G2 at dersom en egenskap g er implisert av en positiv egenskap f er også g en positiv egenskap. Det er i det minste ingen opplagt sak at dette er plausibelt. Det er særlig to innvendinger man kan fremføre mot dette prinsipp. Den første er denne: Anta f er en positiv egenskap, for eksempel egenskapen å være vennlig. La g på den annen side være en klart negativ egenskap, for eksempel egenskapen å være et vesen som elsker å se at andre lider. Hvis man da holder fast ved G2 må man innrømme at disjunksjonen av disse to egenkapene f og g er positiv. Man må med andre ord innrømme at det å være et vesen som enten er vennlig eller som elsker å se at andre lider er en positiv egenskap. Men det fortoner seg mildt sagt en smule uforståelig hvorfor denne disjunktive egenskapen bør karakteriseres som positiv. Kunne man ikke med like stor rett hevde at enhver egenskap som er implisert av en negativ egenskap er negativ? I så tilfelle ville den nevnte disjunktive egenskap måtte kvalifisere som negativ. Man behøver imidlertid ikke å gå så langt som å karakterisere den som negativ. Det kan være nok å påstå at den ikke er positiv.

Den andre innvendingen har vi allerede berørt. En positiv egenskap, som for eksempel vennlighet, impliserer en rekke egenskaper av en nokså "tom" art verdimessig settt. Man kan nevne slike eksempler som egenskapen å være identisk med seg selv, egenskapen å være et vesen som enten har to ben eller ikke to ben og så videre. Holder man fast ved G2 og mener at det finnes positive egenskaper må også de nevnte egenskaper regnes som positive. Men det er vanskelig å finne noe grunnlag for en slik antagelse bortsett fra et irrasjonelt ønske om å tviholde på G2.

§7 En fremstilling av det andre argumentet til Small

I det følgende forutsettes det at språket til S5* er utvidet med en predikatkonstant av annen orden "Psv". Et uttrykk av typen "Psv(f)" leses "f er en positiv egenskap". I tillegg skal L inneholde to andre predikatkonstanter av første orden, nemlig "Gu" og "Ne". Et uttrykk av typen "Gu(x)" leses "x er et guddommelig vesen". "Ne(x)" leses "x er en entitet som har nødvendig eksistens". Disse kravene til L er forøvrig de samme som vi forutsatte i §5.

Ovenfor studerte vi den første versjonen av Gödels argument for Guds eksistens som har blitt fremstillt av Small. Small har imidlertid en annen versjon av argumentet. Denne versjonen fremlegger han i Small [1].

© Morten Harboe Rognes

I dette avsnittet skal vi formalisere denne andre versjonen av argumentet innenfor rammen av S5* med språket utvidet slik vi har angitt ovenfor. Vi skal dessuten gi et detaljert syntaktisk bevis i S5* som viser at premissene i argumentet impliserer konklusjonen.

For å gjøre presentasjonen av argumentet noenlunde forståelig finner vi det hensiktsmessig å innføre visse definisjoner.

Anta X er en egenskap av andre orden og at x er et individ. Da har man at (Af)(X(f) → f(x)) holder hvis og bare hvis enhver egenskap f som har egenskapen X er slik at x har denne egenskapen f. Sagt på en annen, semantisk måte , kan vi si at uttrykket (Af)(X(f)→ f(x)) er sant i verdenen w hvis og bare hvis vi har, for enhver egenskap f som er med i ekstensjonen til X i verdenen w, at individet x er med i ekstensjonen til f i verdenen w. Mengen av alle de individer x som oppfyller formelen (Af)(X(f)→f(x)) i verdenen w vil derfor være snittet av ekstensjonen i verdenen w til diverse egenskapene f som er med i ekstensjonen til X i verdenen v. Den egenskapen g som har som ekstensjon i enhver verden w alle de x som oppfyller kravet (Af)(X(f)→f(x)) i verdenen w skal vi kalle for snittet av X. Vi bruker "Ωe(g,X)" som forkortels for "egenskapen g representerer snittet av X" og definerer dette uttrykket slik:

Definisjon 7.1
"Ωe(g, F)" forkorter "Nec((Ax)(g(x)↔ (Af)(F(f) → f(x))))"

Anta igjen at X er en egenskap av annen orden, det vil si en egenskap ved egenskaper. Anta at x er et individ. Har vi da at det nødvendigvis er slik at x har egenskapen f hvis og bare vis f har egenskapen X er det ikke urimelig å si at X representerer mengden av alle de egenskaper som definerer identiteten til x og derfor i en hvis forstand representerer individet x's vesen eller dets identitet. Vi skal bruke "Ves(X,x)" som forkortelse for det lengere uttrykket "Nec((Af)(X(f) ↔ f(x))). Uttrykket "Ves(X,x)" skal vi, som vi har antydet lese "Egenskapen av annen orden X representerer x's vesen". Vi kan sammenfatte dette ved den følgende definisjon:

Definisjon 7.2
"Ves(F,x)" forkorter "Nec((Af)(F(f)↔ f(x)))"

Man ser ganske lett ved hjelp av komprehensjonsaksiomene i S5* at dersom x er et individ må det finnes en egenskap F av annen orden slik at Ves(F,x). Dessuten ser man også lett denne egenskapen av annen orden må være entydig bestemt. Dette innses ved hjelp av de aksiomene om identitet som er tatt med i S5*. Man innser lett at det samme må holde om vi ser på Ωe(g,X). Er X gitt er g entydig bestemt. Dette innses ved hjelp av identitetsaksiomene. Videre har man at dersom X er en egenskap av annenorden så må det finnes en egenskap som representerer snittet av X. Dette følger ved hjelp av komprehensjonsaksiomene C1 og C2 som ble omtalt i §4.

Hvis nå egenskapen X av annen orden representerer alle de egenskapene som definerer individet x skal vi si at den egenskapen g som representerer snittet av X representerer *identiteten* til individet x. Vi skal bruke "Ident(g,x)" som forkortelse for det lengere uttrykket "egenskapen g av første orden representerer identiteten til individet x". Formelt er uttrykket definert slik:

Definisjon 7.3
"Ident (g,x)" forkorter " (EX)(Ves(X,x) & Ωe(g,X))"

© Morten Harboe Rognes

Som ved de øvrige relasjonene vi har innført bemerker vi at dersom vi har Ident(g,x) så er g entydig bestemt.

Før vi går videre og presenterer premissene i det andre argumentet til Small noterer vi den følgende sats om relasjonen Ωe:

Teorem 7.1

(a) $\vdash (\forall f)(F(f) \rightarrow Nec(F(f)) \;\&\; F(f) \;\&\; \Omega e(g,F) \rightarrow g \Rightarrow f$

(b) $\vdash Nec((\forall f)(F(f) \rightarrow h \Rightarrow f)) \;\&\; \Omega e(g,F) \rightarrow h \Rightarrow g$

Bevis: *Ad (a)*: Man har i lys av definisjonen av Ωe:

(1) $\vdash \Omega e(g,F) \leftrightarrow Nec((\forall x)(g(x) \leftrightarrow (\forall f)(F(f) \rightarrow f(x))))$. Fra dette følger ved hjelp av elementære predikatlogiske teoremer:

(2) $\vdash \Omega e(g,F) \rightarrow Nec((\forall f)(F(f) \rightarrow (\forall x)(g(x) \rightarrow f(x))))$

Vi har videre:

(3) $\vdash (\forall f)(F(f) \rightarrow Nec(F(f)) \;\&\; F(f) \rightarrow Nec(F(f))$

Fra dette og (2) følger:

(4) $\vdash (\forall f)(F(f) \rightarrow Nec(F(f)) \;\&\; F(f) \;\&\; \Omega e(g,F) \rightarrow Nec(F(f)) \;\&\; Nec((\forall f)(F(f) \rightarrow (\forall x)(g(x) \rightarrow f(x))))$

Siden konsekventen her impliserer $Nec((\forall x)(g(x) \rightarrow f(x))$ har vi det vi ønsker, nemlig:

(5) $\vdash (\forall f)(F(f) \rightarrow Nec(F(f)) \;\&\; F(f) \;\&\; \Omega e(g,F) \rightarrow g \Rightarrow f$

Ad (b): Man har i lys av definisjonen av Ωe:

(1) $\vdash \Omega e(g,F) \leftrightarrow Nec((\forall x)(g(x) \leftrightarrow (\forall f)(F(f) \rightarrow f(x))))$. Fra dette følger ved hjelp av elementære predikatlogiske teoremer:

(2) $\vdash \Omega e(g,F) \rightarrow Nec((\forall x)((\forall f)(F(f) \rightarrow f(x)) \rightarrow g(x))$

Ved hjelp av definisjonen av => har man:

(3) $\vdash Nec((\forall f)(F(f) \rightarrow h \Rightarrow f)) \rightarrow Nec((\forall f)(F(f) \rightarrow (\forall x)(h(x) \rightarrow f(x)))$

Herav følger:

(4) $\vdash Nec((\forall f)(F(f) \rightarrow h \Rightarrow f)) \rightarrow Nec((\forall x)(h(x) \rightarrow (\forall f)(F(f) \rightarrow f(x)))$

Fra (2) og (4) følger åpenbart:

(5) $\vdash Nec((\forall f)(F(f) \rightarrow h \Rightarrow f)) \;\&\; \Omega e(g,F) \rightarrow Nec((\forall x)(h(x) \rightarrow g(x)))$

Ved hjelp av definisjonen av => har man så:

(6) $\vdash Nec((\forall f)(F(f) \rightarrow h \Rightarrow f)) \;\&\; \Omega e(g,F) \rightarrow h \Rightarrow g$ **QED**.

Vi skal nå gjøre rede for de premissene som inngår i det andre argumentet til Small. De tre første premissene, som vi her betegner med A1 - A3 er helt identiske med de tre første premissene i det første argumentet:

A1 $Nec[(\forall f)(Psv(f) \rightarrow Nec(Psv(f))]$

A2 $Nec[(\forall f)(\forall g)(Psv(f) \;\&\; f \Rightarrow g \rightarrow Psv(g)]$

A3 $Nec[(\forall f)(Psv(f) \rightarrow (\forall g)(Nec((\forall x)(g(x) \leftrightarrow \neg f(x))) \rightarrow \neg Psv(g))]$

Som man ser sier den første premissen at det er nødvendig at dersom en egenskap er positiv så er det nødvendig at den er positiv. Det er altså ikke mulig at en egenskap kan være positiv i en verden mens den så opphører med å være dette om vi forflytter oss til en annen verden. Når det gjelder det andre aksiomet minner vi om at uttrykket "f=>g" brukes som forkortelse for "$Nec((\forall x)(f(x) \rightarrow g(x))$". Med andre ord holder f=>g hvis og bare hvis ektensjonen til

© Morten Harboe Rognes

egenskapen f i enhver verden er inkludert i ektensjonen til egenskapen g. Holder "f=>g" sier vi at egenskapen f impliserer egenskapen g. Den andre premissen, A2, sier derfor at dersom f er en positiv egenskap så er enhver egenskap som er implisert av den også positiv. Har man Nec((Ax)(g(x) ↔ ¬f(x)) er g negasjonen av egenskapen f. Den tredje premissen uttrykker derfor at dersom f er en positiv egenskap og g er negasjonen av denne egenskapen f så er det ikke slik at g er en positiv egenskap.

I dette andre argumentet tar imidlertid Small med en annen premiss som er svært sterk. Premissen er den følgende:

A4 Nec[(Ag)(Af)(Nec((Ax)(g(x)↔ ¬f(x))) → Psv(f) v Psv(g))]

Denne premissen uttrykker at dersom g er negasjonen av en egenskap f så er enten f eller g, det vil si negasjonen av f, en positiv egenskap. Sammen med A1 - A3 innebærer denne premissen at mengden av de positive egenskapene utgjør en egenskapsmengde som er lukket under implikasjon, konsistent og i en viss forstand fullstendig. Premissen A4 kan knapt sies å være særlig selvinnlysende. Vi skal drøfte den mer omhyggelig i §8 og der vise at den i nærvær av de andre premissene leder til resultater som det er vanskelig å anse for annet enn absurde.

La oss nå gå over til den siste egenskapen som karakteriserer mengden av de positive egenskapene. Denne premissen sier at en egenskap g som representerer snittet av en annen ordens egenskap X er positiv dersom X oppfyller de følgende tre krav: For det første må X være en annenordens egenskap hvor ekstensjonsfunksjonen er konstant, med andre ord må X ha den samme ekstensjonen i enhver verden. I L kan dette uttrykkes ved den følgende betingelse: Nec((Af)(X(f) → Nec(X(f))). For det andre må ekstensjonen til X være ikke-tom i enhver verden. Dette uttrykkes ved: Nec((Ef)X(f)). For det tredje må enhver egenskap som har egenskapen X nødvendigvis være positiv: Nec((Af)(X(f)→ Psv(f)). Premissen kan i lys av disse forklaringene formuleres på den følgende måte:

A5 Nec[Nec((Af)(F(f)→Psv(f))) & Nec((Af)(F(f) → Nec(F(f))) & Nec((Ef)F(f))
→(Ag)(Ωe(g,F) → Psv(g))]

Den neste premissen i Smalls argument kan oppfattes som en definisjon av hva som menes med nødvendig eksistens. "Ne" betegner egenskapen å ha nødvendig eksistens. Premissen sier at et individ x har denne egenskap hvis og bare hvis det er slik at dersom g er en egenskap som representerer identiteten til x så må g ha en ekstensjon som er ikke-tom i enhver verden. Premissen kan derfor formuleres slik:

A6 Nec[(Ax)(Ne(x) ↔ Nec((AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F) → Nec((Ey)g(y)))))]

Denne premissen har omtrent den samme funksjon i dette argumentet som G6 hadde i det første argumentet.

Den neste premissen uttrykker at Ne, egenskapen å ha nødvendig eksistens er en positiv egenskap. Den er identisk med G7 i det første argumentet. Dette kan naturligvis diskuteres og har allerede blitt diskutert. Premissen kan formuleres slik:

A7 Nec(Psv(Ne))

Det er særlig de to siste premissene i Smalls andre argument som gjør at det andre argumentet

© Morten Harboe Rognes

til Small får en litt annen karakter enn det første. Den nest siste premissen sier at noe er et guddommelig vesen hvis og bare hvis det er i besittelse av enhver positiv egenskap. Det kan følgelig formuleres på den følgende måte:

A8 $\quad \mathrm{Nec}((Ax)(Gu(x) \leftrightarrow (Ag)(Psv(g) \rightarrow g(x))))$

Den siste premissen i argumentet sier dette: Dersom x er et vesen og g er en egenskap som representerer identiteten til x så er egenskapen g identisk med egenskapen å være guddommelig, det vil si egenskapen Gu. Som man skjønner kan premissen formuleres slik:

A9 $\quad \mathrm{Nec}((Ax)(Gu(x) \rightarrow (AF)(Ag)(Ves(F,x) \,\&\, \Omega e(g,F) \rightarrow g = Gu)))$

Smalls andre argument har naturligvis en konklusjon. Denne sier at det er logisk nødvendig at det finnes et og bare et guddommelig vesen:

K $\quad \mathrm{Nec}((E!x)\ Gu(x))$

I det følgende skal vi forkorte konjunksjonen av A1 - A9 med H2. På samme måte som i §5 kan man vise at dersom $\vdash H2 \rightarrow \alpha$ så har man også $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}(\alpha)$. Man ser jo at alle premissene har formen $\mathrm{Nec}(\gamma;i)$ $(i=1...9)$ slik at $\vdash H2 \leftrightarrow \mathrm{Konj}/i,1,9/\mathrm{Nec}(\gamma;i)$. Men dette er jo ekvivalent med (+) $\vdash H2 \leftrightarrow \mathrm{Nec}(\mathrm{Konj}/i,1,9/(\gamma;i))$. Har vi derfor $\vdash H2 \rightarrow \alpha$, har vi ved hjelp av nødvendighetsregelen $\vdash \mathrm{Nec}(H2 \rightarrow \alpha)$ og derfor siden nødvendighet distribuerer over kondisjonaler at $\vdash \mathrm{Nec}(H2) \rightarrow \mathrm{Nec}(\alpha)$. Men siden (+) holder har vi i kraft av de rent modallogiske aksiomene som inngår i S5* at $\vdash H2 \leftrightarrow \mathrm{Nec}(H2)$. Det følger at man derfor må ha $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}(\alpha)$. Regelen $\vdash H2 \rightarrow \alpha \rightarrow \vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}(\alpha)$ holder derfor.

Beviset for $\vdash H2 \rightarrow K$ skjer ikke direkte. Vi viser en rekke setninger før vi kommer til denne setningen. Først vises det at H2 impliserer at egenskapen å være guddommelig er en poitiv egenskap.

Teorem 7.2

$\vdash H2 \rightarrow Psv(Gu)$

Bevis: Det følger umiddelbart at følgende holder, siden A5 er en konjunkt i H2:

(1) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}[\mathrm{Nec}((Af)(F(f) \rightarrow Psv(f))) \,\&\, (Af)(F(f) \rightarrow \mathrm{Nec}(F(f)) \,\&\, \mathrm{Nec}((Ef)F(f)) \rightarrow (Ag)(\Omega e(g,F) \rightarrow Psv(g))]$

Nå har vi åpenbart at $(Af)(Psv(f) \rightarrow Psv(f))$ er et teorem. Derfor:

(2) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}(\mathrm{Nec}((Af)(Psv(f) \rightarrow Psv(f))))$

Videre har vi siden A1 er en konjunkt i H2 at

(3) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(Psv(f) \rightarrow \mathrm{Nec}(Psv(f)))$

Ved hjelp av A7 har vi :

(4) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}(Psv(Ne))$

Fra (1) følger så ved hjelp av (2), (3) og (4):

(5) $\vdash H2 \rightarrow (Ag)(\Omega e(g,Psv) \rightarrow Psv(g))$ Ved hjelp av definisjonen av Ωe ser man at (5) innebærer :

(6) $\vdash H2 \rightarrow (Ag)(\mathrm{Nec}((Ax)(g(x) \leftrightarrow (Af)(Psv(f) \rightarrow f(x)))) \rightarrow Psv(g))$

Siden A8 er en konjunkt i H2 har vi trivielt:

(7) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Ax)(Gu(x) \leftrightarrow (Af)(Psv(f) \rightarrow f(x))))$

Fra dette og (6) kan vi så konkludere med:

© Morten Harboe Rognes

(8) |- H2→ Psv(Gu) **QED.**

Man legger merke til at vi i dette beviset har brukt premissene A1, A5, A7 og A8.
Vi ser så på:

Teorem 7.3
(a) |- H2→ Psv(f) → Pos((Ex)f(x))
(b) |- H2→ Pos((Ex)Gu(x))

Som man sier (a) at H2 impliserer at dersom f er en positiv egenskap så er det logisk mulig at det finnes noe som har denne egenskapen f. (b) uttrykker at dersom H2 holder er det logisk mulig at det finnes et eller annet guddommelig vesen.

Bevis: Ad (a): Beviset for dette er nøyaktig som beviset for Teorem 5.2. Ad (b): Dette følger fra punkt (a) ved hjelp av Teorem 7.2. **QED.**

Gå man tilbake til beviset for Teorem 5.2 og studerer dette nærmere ser an at det bare er A2 og A3 som benyttes når det gjelder beviset for punkt (a).
Vi gir så bevis for den følgende sats:

Teorem 7.4
|- H2→ Nec((Ax)(Gu(x)→ Ne(x))

Bevis: Det følger temmelig direkte fra A8 at følgende holder:
(1) |- H2→ Nec((Ax)(Gu(x)→ (Af)(Psv(f)→ f(x))))
Siden (Ax)(Gu(x)→ (Af)(Psv(f)→ f(x)) impliserer (Af)(Psv(f) → (Ax)(Gu(x) →f(x)) ved hjelp av ren predikatlogikk har vi derfor:
(2) |- H2→ Nec((Af)(Psv(f) → (Ax)(Gu(x) →f(x))))
Ved instansiering med hensyn på f følger herav:
(3) |- H2→ Nec(Psv(Ne) → (Ax)(Gu(x) →Ne(x)))
Nå har vi åpenbart, siden A7 er en komponent i H2:
(4) |- H2→ Psv(Ne).
Fra dette følger så:
(5) |- H2→ Nec(Psv(Ne)). Fra (3) og (5) følger så:
(6) |- H2→ Nec((Ax)(Gu(x)→ Ne(x)) **QED.**

Vi går nå et steg videre og viser at H2 impliserer at det er logisk mulig at det finnes et vesen som både er guddommelig og som har nødvendig eksistens:

Teorem 7.5
|- H2→ Pos((Ex)(Gu(x) & Ne(x)))

Bevis: Dette følger umiddelbart ved hjelp av Teorem 7.4 og Teorem 7.3. **QED.**

Teorem 7.6
|- H2→ Nec((Ex)(Gu(x) & Ne(x)). → Nec((Ey)Gu(y)))

Bevis: Siden A6 er en konjunkt i H2:

© Morten Harboe Rognes

(1) |- H2→ Nec[(Ax)(Ne(x) ↔ Nec((AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F) →
Nec((Ey)g(y)))))]

Tilsvarende har vi siden A9 er en konjunkt i H2:

(2) |- H2→ Nec((Ax)(Gu(x) → (AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F) → g = Gu)))

Fra (1) følger, siden Nec(α) → α er et aksiom:

(3) |- H2→ Nec[(Ax)(Ne(x) ↔ (AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F) →
Nec((Ey)g(y))))]

Herav følger så videre:

(4) |- H2→ Nec[(AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F)→(Ax)(Ne(x) → Nec((Ey)g(y))))]

Fra (2) følger ved hjelp av predikatlogikk:

(5) |- H2→ Nec((AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F) → (Ax)(Gu(x) → g = Gu)))

Fra (4) og (5) følger ved hjelp av predikatlogikk:

(6) |- H2→ Nec((AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F)→
(Ax)(Gu(x) & Ne(x) → Nec((Ey)g(y)) &g = Gu)))

Fra dette følger ved hjelp av aksiomene for identitet:

(7) |- H2→ Nec((AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F)→
(Ax)(Gu(x) & Ne(x) → Nec((Ey)Gu(y))))

Ved hjelp av predikatlogiske teoremer kan vi så slutte:

(8) |- H2→ Nec((AF)(Ag)(Ves(F,x) & Ωe(g,F)→
(Ex)(Gu(x) & Ne(x)). → Nec((Ey)Gu(y)))

Siden variablene F og g ikke forekommer fri i konsekventen i kondisjonalen etter nødvendighetsoperatoren kan vi herav slutte:

(9) |- H2 → Nec((EF)(Eg)(Ves(F,x) & Ωe(g,F)).→
(Ex)(Gu(x) & Ne(x)). → Nec((Ey)Gu(y)))

Nå har vi fra definisjonen av Ves og komprenhensjonsaksiomene at:

(10) |- (Ax)(EF)(Ves(F,x))

Tilsvarende har vi fra definisjonen av Ωe og komprenhensjonsaksiomene at

(11) |- (AF)(Eg)(Ωe(g,F))

Fra (10) og (11) følger:

(12) |- (EF)(Eg)(Ves(F,x) & Ωe(g,F))

Herav har vi så ved hjelp av nødvendighetsregelen:

(13) |- Nec((EF)(Eg)(Ves(F,x) & Ωe(g,F)))

Fra (9) og (13) følger så det vi ønsker, nemlig:

|- H2 →Nec((Ex)(Gu(x) & Ne(x)). → Nec((Ey)Gu(y)))) **QED.**

Teorem 7.7

|- H2→ Nec((Ey)Gu(y))

Bevis: Fra Teorem 7.6 har vi:

(1) |- H2→ Nec((Ex)(Gu(x) & Ne(x)) → Nec((Ey)Gu(y)))

Teeorem 7.5 sier:

(2) |- H2→ Pos((Ex)(Gu(x) & Ne(x)))

Fra (1) og (2) følger ved enkle modallogiske regler at:

(3) |- H2→ Pos(Nec((Ey)Gu(y)))

Siden Pos(Nec(α)) → Nec(α) er et teorem i S5* har vi derfor:

(4) |- H2→ Nec((Ey)Gu(y)) **QED.**

Hvis man aksepterer H2 følger det fra Teorem 7.7 at man bør akseptere at det nødvendigvis

© Morten Harboe Rognes

finnes et guddommelig vesen. Det neste teoremet viser at et slikt guddommelig vesen nødvendigvis er entydig bestemt:

Teorem 7.8

$\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Ax)(Ay)(Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow x=y))$

Bevis:

Fra komprehensjonssiomene kan vi slutte at det må finnes F;1 slik at:

(1) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(F;1(f) \leftrightarrow f(x))$

Tilsvarende kan vi slutte at det må finnes F;2 slik at:

(2) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(F;2(f) \leftrightarrow f(y))$

På samme vis har vi ved hjelp av komprehensjonsaksiomene:

(3) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Ax)(g;1(x) \leftrightarrow (Af)(F;1(f) \rightarrow f(x))))$

(4) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Ax)(g;2(x) \leftrightarrow (Af)(F;2(f) \rightarrow f(x))))$

Nå følger det nesten umiddelbart fra A9 at:

(5) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Ax)(Gu(x) \rightarrow (AF)(Ag)(Ves(F,x) \,\&\, \Omega e(g,F) \rightarrow g = Gu)))$

Herav kan vi så slutte:

(6) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}((AF)(Ag)(Ves(F,x) \,\&\, \Omega e(g,F) \rightarrow Gu(x) \rightarrow g = Gu)))$

Ved å instansiere med hensyn på henholdsvis parene F;1,g;1 og F;2,g;2 får vi:

(7) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}(\, Ves(F;1,x) \,\&\, \Omega e(g;1,F;1) \rightarrow Gu(x) \rightarrow g;1 = Gu)))$

(8) $\vdash H2 \rightarrow \mathrm{Nec}(\, Ves(F;2,y) \,\&\, \Omega e(g;2,F;2) \rightarrow Gu(y) \rightarrow g;2 = Gu)))$

Fra (7) og (8) kan vi ved hjelp av definisjonene av Ves og Ωe samt (1) - (4) ovenfor slutte:

(9) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow g;1=g;2$

Nå har vi: $g;1= g;2 \rightarrow \mathrm{Nec}((Ax)(g;1(x) \leftrightarrow g;2(x)))$. Fra dette faktum, (3), (4) og (9) følger:

(10) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow$
$\mathrm{Nec}((Ax)((Af)(F;1(f) \rightarrow f(x)) \leftrightarrow (Af)(F;2(f) \rightarrow f(x))))$

Fra (1) følger ved hjelp av setningslogikk:

(11) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(F;1(f) \rightarrow f(x))$

Fra dette og (10) kan man slutte:

(12) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(F;2(f) \rightarrow f(x))$

Ved hjelp av (2) kan vi slutte:

(13) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(f(y) \rightarrow F;2(f))$

Fra (12) og (13) har vi så:

(14) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(f(y) \rightarrow f(x))$

Fra (2) kan vi videre slutte ved hjelp av setningslogikk:

(15) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(F;2(f) \rightarrow f(y))$

Fra dette og (10) følger så:

(16) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(F;1(f) \rightarrow f(y))$

Fra (1) følger så:

(17) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(f(x) \rightarrow F;1(f))$

Fra (16) og (17) har vi så:

(18) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(f(x) \rightarrow f(y))$

Fra (14) og (18) ser man at vi har:

(19) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow \mathrm{Nec}((Af)(f(x) \leftrightarrow f(y))$

Fra komprehensjonsaksiomene følger det at det må finnes r slik at
(19.1) $\mathrm{Nec}((Ax)(r(x) \leftrightarrow x=y))$. Fra $\mathrm{Nec}((Af)(f(x) \leftrightarrow f(y))$ følger da (19.2) $r(x) \leftrightarrow r(y)$. Siden vi fra (19.1) også kan slutte $r(x) \leftrightarrow x=y$ og $r(y) \leftrightarrow y=y$ følger det at x=y. Vi har derfor:

(20) $\vdash H2 \rightarrow Gu(x) \,\&\, Gu(y) \rightarrow x=y$

© Morten Harboe Rognes

Herav følger ved universell generalisering:

(21) |- H2→ (Ax)(Ay)(Gu(x) & Gu(y) → x=y)

Ved hjelp av nødvendighetsregelen kan vi så slutte:

|- H2→ Nec((Ax)(Ay)(Gu(x) & Gu(y) → x=y)) **QED.**

Den følgende sats viser at Smalls andre argument holder. H2 impliserer konklusjonen K. Vi har:

Teorem 7.9

|- H2→ Nec((E!y)Gu(y))

Bevis: Dette følger direkte fra Teorem 7.8 og Teorem 7.7. **QED**.

Betrakter man deduksjonene ovenfor nøye ser man at det ikke på noe punkt henvises til A4. Denne premissen kan derfor sløyfes. I Smalls versjon av argumentet er denne med.

Når det gjelder A9 nevner ikke Small denne premiss. Det virker som han mener at den kan utledes fra de andre premissene i H2. En nærmere semantisk analyse av premissene, som vi skal foreta i neste avsnitt, viser imidlertid at dette ikke er tilfelle. Heller ikke kan A9 utledes fra de andre premissene om man inkluderer A4. På dette punkt virker det derfor som om Small beklageligvis tar feil.

§7.1 Semantisk analyse av premissene i det andre argumentet til Small.

På samme måte som vi tidligere undersøkte hva premissene i det første argumentet til Small uttrykte i semantiske termer skal vi nå gjøre det samme i forbindelse med det andre argumentet. Først er det imidlertid av en viss viktighet å definere presist visse begrepsdannelser som vi har bruk for.

I det følgende bruker vi den notasjon som vi har anvendt i tidligere avnitt. D betegner mengden av mulige individer, I mengden av mulige verdener. E;1 er mengden av alle egenskaper av første-orden, dvs. mengden av alle funksjoner i Pt(D)^I. Videre er E;2 mengden av alle egenskaper av annen orden, det vil si mengden av alle funksjoner fra I inn i Pt(E;1). Er x en mengde av mengder bemerker vi også at Sn(x) betegner det vanlige mengdeteoretiske snitt av elementene i x. På analogt vis betegner Un(x) unionen av de diverse elementene i x.

Anta nå at X er en egenskap av annen orden. Vi betrakter X(w) som er ekstensjonen av til X i verdenen w. Vi har da at X(w) er en samling av egenskaper av første orden. Tar vi nå snittet av ekstensjonene i verdenen w til de f som er med i X(w), ie betrakter Sn(Mg(f(w): fêX)) vil dette være en mengde. Den funksjonen som til enhver verden wêI tilordner Sn(Mg(f(w): fêX(w))) skal vi betegne med σ.

Anta x er et individ. Vi har i så fall at Mg(a: aêE;1 & xêa(w)) er mengden av alle de egenskaper av første orden som x har i verdenen w. Er da X en egenskap av annen orden som i hver verden w har som ekstensjon Mg(a: aêE;1 & xêa(w)) sier vi at X representerer vesenet til individet x. Vi benytter E(X,t) for å betegne denne relasjonen. Man kan lett vise at dersom x er et individ finnes det en og bare annen ordens egenskap X som oppfyller betingelsen E(X,t). Vi betegner den egenskapen som vi får når vi anvender snittoperasjonen σ på denne egenskap av annen orden med υ(x). De begrepsdannelsene vi nå har innført kan formelt defineres på den følgende måte:

© Morten Harboe Rognes

Definisjon 7.1.1 Anta XêE;2 og xêD. Da setter vi:

(a) $\sigma(X) = Mg(<w, Sn(Mg(f(w): f\hat{e}X(w)))>: w\hat{e}I)$

(b) $E(X,x) \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow X(w)= Mg(a: a\hat{e}E;1 \ \& \ x\hat{e}a(w)))$

(c) $\upsilon(x) = \sigma((iX)(X\hat{e}E;2 \ \& \ E(X,x)))$

Før vi går videre skal vi bevise noen enkle satser. Vi viser først at $\upsilon(x) = \mu;x$ om x er et individ:

Teorem 7.1.1 Man har at $\upsilon(x) = \mu;x$ for alle xêD

Bevis: Vi har ved hjelp av definisjonen av operasjonen υ, om xêD og wêI, at:

(1) $\upsilon(x)(w) = \sigma((iX)(X\hat{e}E;2 \ \& \ E(X,x))$
$= Sn(Mg(f(w): f\hat{e} (iX)(X\hat{e}E;2 \ \& \ E(X,x))(w)))$
$= Sn(Mg(f(w): f\hat{e}Mg(a: a\hat{e}E;1 \ \& \ x\hat{e}a(w))))$
$= Sn(Mg(f(w): f\hat{e}E;1 \ \& \ x\hat{e}f(w)))$
$= Mg(y: (Af)(f\hat{e}E;1 \ \& \ x\hat{e}f(w) \rightarrow y\hat{e}f(w))$

Anta (2) $(Af)(f\hat{e}E;1 \ \& \ x\hat{e}f(w) \rightarrow y\hat{e}f(w))$ for vilkårlig yêD. Sett $f0 = Mg(<w,\{x\}>:w\hat{e}I)$. Da har vi åpenbart $f0\hat{e}E;1 \ \& \ x\hat{e}f0(w)$. Fra dette og (2) følger $y\hat{e}f0(w)= \{x\}$. Anta på den annen side at $y\hat{e}\{x\}$. da har man trivielt at y=x. Er da f et vilkårlig element slik at $f\hat{e}E;1 \ \& \ x\hat{e}f(w)$ har vi $y\hat{e}f(w)$.

I lys av dette har vi at (2) holder hvis og bare hvis $y\hat{e}\{x\}$. Det følger derfor at

(3) $Mg(y: (Af)(f\hat{e}E;1 \ \& \ x\hat{e}f(w) \rightarrow y\hat{e}f(w)) = \{x\}$

Fra dette og (1) kan man slutte: $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow \upsilon(x)(w) = \{x\})$. Herav følger så ved hjelp av definisjonen av $\mu;x$ at $\upsilon(x) = \mu;x$. **QED**.

Det er ingen helt opplagt sak hvordan snitt-operatoren σ på elementer i E;2 forholder seg til SNe som kun er definert for elementene i Pt(E;1). Man har imidlertid:

Teorem 7.1.2 Anta $X\hat{e}E;2 \ \& \ (Aw)(Aw')(w,w'\hat{e}I \rightarrow X(w) = X(w'))$. Da gjelder.
$(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow \sigma(X) = SNe(X(w)))$

Bevis: Siden $I \neq \emptyset$ har vi at det finnes w0 slik at w0êI. Sett per definisjon Y= X(w0). Da har vi ved hjelp av definisjonen av SNe om w er et vilkårlig element i I:

(1) $SNe(Y)(w) = Sn(Mg(f(w): f\hat{e}Y))$. Tilsvarende har vi ved hjelp av definisjonen av σ at (2) $\sigma(X)(w) = Sn(Mg(f(w): f\hat{e}X(w)))$ om w er et vilkårlig element i I. Anta nå at wêI for vilkårlig w. Fra forutsetningen i satsen følger da ved hjelp av definisjonen av Y :

(3) Y = X(w). Fra dette, (1) og (2) følger: $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow \sigma(X)(w)= SNe(Y)(w))$. Fra dette kan vi i sin tur slutte: (4) $\sigma(X) = SNe(Y)$. Anta wêI for vilkårlig w. Fra forutsetningene i satsen har man da: Y=X(w0) = X(w). Det følger at $\sigma(X)= SNe(X(w))$ ved hjelp av (4). Siden w var vilkårlig har vi $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow \sigma(X)=SNe(X(w)))$. **QED**.

Vi går nå over til den semantiske analysen av premissene i Smalls andre argument. La oss først nevne at vi i det følgende tenker oss at M=<D,I,V> er den naturlige modellen for L. D er som før mengden av individer og I mengden av mulige verdener. Som i §6 betegner vi V(Psv) med Psv* , V(Ne) med Ne* og V(Gu) med Gu*.

(A) Man ser at visse av premissene i de to argumentene som presenteres av Small er felles.

© Morten Harboe Rognes

A1 - A3 i det første argumentet er identiske med henholdsvis G1 - G3 i det andre argumentet. På dette punkt har vi derfor ikke noe nytt å si når det gjelder den semantiske analysen. Den blir nøyaktig som i §6

(B) La oss imidlertid se litt nærmere på A4. Anta f,g er elementer i E;1 og at f',g' er navnene på henholdsvis f og g i L(M). Da har vi <M,w> ⊨ Nec((Ax)(g'(x) ↔ ¬f'(x)) hvis og bare hvis g=Neg(f). Man ser derfor at A4 holder i M ved verdenen w hvis og bare hvis man har for enhver egenskap fêE;1 at enten f eller negajonen av f er blandt de positive egenskapene i w Vi har med andre ord:

<M,w> ⊨ A4 ↔ (Aa)(aêE;1 → aêPsv*(w) v Neg(a)êPsv*(w)

Man ser at dette kravet er meget sterkt. Sammen med de andre premissene A1 - A3 impliserer det at mengden av de positive egenskapene utgjør en fullstendig egenskapsmengde.

(C) Før vi går videre med de andre premissene A5 - A9 argumentet er det hensiktsmessig å se nærmere på hva uttrykkene "Ωe(g,X)" og "Ves(X,x)" innebærer semantisk sett. Anta nå at gêE;1 og XêE;2. La g' og X' være navnene på henholdvis g og X i L(M). da har vi:

<M,w> ⊨ Ωe(g',X') ↔ (Aw)(Ax)(wêI & xêD →.
xêg(w) ↔ (Aa)(aêE;1 → (aêX(w) → xêa(w))))
↔ (Aw)((Ax)(wêI & xêD → g(w) = Sn(Mg(a(w): aêX(w))))
↔ g= Mg(<w,Sn(Mg(a(w): aêX(w)))>: wêI)

Som man ser fra det vi har skrevet ovenfor har vi definert σ(X) ved

σ(X) = Mg(<w,Sn(Mg(a(w): aêX(w)))>: wêI)

Vi har derfor:

<M,w> ⊨ Ωe(g',X') ↔ g= σ(X)

Er X en egenskap av annen orden representerer σ(X) i en viss forstand snittet av X, det vil si σ(X) er den egenskapen av første orden der ekstensjonen i verdenen w er snittet av ekstensjonene i w til alle de egenskapene f som er med i X(w). Er en konstant egenskap av annen orden ser man fra det vi har vist ovenfor at (Aw)(wêI → σ(X) = SNe(X(w)).

La oss så ta for oss betingelsen "Ves(X,x)". Anta X êE;2 & xêD og la X' og x' være navnene på henholdsvis x og X i L(M). Da har vi:

(1) <M,w> ⊨ Ves(X',x') ↔ <M,w> ⊨ Nec((Af)(X'(f) ↔ f(x'))
↔ (Aw)(wêI → (Aa)(aêE;1 →. aêX(w) ↔ xêa(w)))
↔ (Aw)(wêI → X(w')= Mg(a: aêE;1 & xêa(w)))

Med andre ord har vi at Ves(X',x') holder i verdenen w i modellen M hvis og bare hvis ekstensjonen til X i enhver verden w' er mengden av alle de egenskaper som individet x har i denne verdenen w'. Setter vi nå, som vi har gjort ovenfor, per definisjon:

E(X,x) ↔ (Aw)(wêI → X(w)= Mg(a: aêE;1 & xêa(w)) ser man umidelbart at

(2) <M,w> ⊨ Ves(X',x') ↔ E(X,x)

Det er lett å vise at dersom x er gitt kan finnes det nøyaktig en og bare en X slik at E(X,x). Kombinerer vi nå våre resultater så langt for Ves(X',x') og Ωe(X',x') ser man at vi har:

(3) <M,w> ⊨ Ves(X',x') & Ωe(g',x') ↔ g = σ((iX)(Ves(X,x)) = υ(x)

Nå har vi imidlertid fra det teoremet vi beviste ovenfor at υ(x)= μ;x om xêD. Det følger derfor at

(4) <M,w> ⊨ Nec((Ag')(AX')(Ves(X',x') & Ωe(g',x') → Nec((Ey)g'(y))))
↔ (Aw)(wêI →. (Ag)(g= μ;x → (Aw')(w'êI → (Ey)(yêg(w')))))
↔ (Ag)(g= μ;x → (Aw')(w'êI → g(w')≠ø))
↔ (Aw')(w'êI → μ;x(w')≠ø)
↔ x=x

© Morten Harboe Rognes

La oss nå se på A5. Anta X er et eller annet attributt av annen orden. La X' være navnet på X i L(M). Da har vi <M,w> ⊨ Nec((Af)(X'(f) → Nec(X'(f)))) innebærer at X er en konstant egenskap, med andre ord en egenskap som har den samme ekstensjon i alle verdener. Videre ser man at <M,w> ⊨ Nec((Ef)X'(f)) er ekvivalent med at ekstensjonen til X er ikke-tom i en eller annen verden. Man har enn mer at <M,w> ⊨ Nec((Af)(X'(f)→ Psv(f)) innebærer at ekstensjonen til X i enhver verden w er inkludert i ekstensjonen til Psv* i verdenen w. Er nå X en konstant egenskap av annen orden, har vi fra det vi viste ovenfor at

(Aw)(wêI → σ(X) = SNe(X(w))). Oppsummerende kan vi derfor si at premissen A5 innebærer at dersom X er en konstant egenskap som impliserer Psv*, og som dessuten har en ikke-tom ekstensjon i en eller annen verden, så er snittet av X en egenskap av første orden som er med i ekstensjonen til Psv* i enhver verden. Resultatet kan formuleres slik:

$$\langle M,w\rangle \models A5 \leftrightarrow X\hat{e}E;2 \,\&\, Const(X) \,\&\, (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow X(w)\neq\emptyset) \rightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow SNe(X(w))\hat{e}Psv^*(w))$$

(D) Studerer man nå A6 kan man på grunnlag av det som er skrevet ovenfor, særlig (4), slutte at denne premissen ikke uttrykker noe annet enn at egenskapen å ha nødvendig eksistens, ie. Ne*, er identisk med den universelle egenskapen V. Vi har:

$$\langle M,w\rangle \models A6 \leftrightarrow$$
$$\langle M,w\rangle \models Nec[(Ax)(Ne(x) \leftrightarrow Nec((Ag)(AX)(Ves(X,x) \,\&\, \Omega e(g,X) \rightarrow Nec((Ey)g(y)))))]$$
$$\leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Ax)(x\hat{e}Ne^*(w) \leftrightarrow x=x))$$
$$\leftrightarrow Ne^*=V$$

Når det gjelder A7 ser man ganske lett at vi må ha:

$$\langle M,w\rangle \models A7 \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Ne^*\hat{e}Psv^*(w)) \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow V\hat{e}Psv^*(w))$$

(E) Når det gjelder premissen A8 kan denne oppfattes som en definisjon av egenskapen, Gu*, dvs. egenskapen å være et individ. Man har i dette tilfellet:

$$\langle M,w\rangle \models A8 \leftrightarrow$$
$$(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Gu^*(w) = Mg(x: (Aa)(a\hat{e}E;1 \rightarrow .\ a\hat{e}Psv^*(w) \rightarrow x\hat{e}a(w))))$$
$$\leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Gu^*(w) = Sn(Mg(a(w): a\hat{e}Psv^*(w))))$$
$$\leftrightarrow Gu^* = Mg(\langle w,Sn(Mg(a(w): a\hat{e}Psv^*(w)))\rangle: w\hat{e}I)$$

Det fremgår fra dette at ekstensjonen til Gu* i verdenen w er snittet av ekstensjonene i verdenen w til alle de egenskapene f som er positive i w, det vil si som er med i Psv*(w).

Vedrørende A9 har vi i lys av det som har blitt bevist ovenfor:

$$\langle M,w\rangle \models A9 \leftrightarrow (Aw)(Ag)(Ax)(w\hat{e}I \,\&\, g=\mu;x \,\&\, x\hat{e}Gu^*(w) \rightarrow g=Gu^*)$$
$$\leftrightarrow (Aw)(Ax)(w\hat{e}I \,\&\, x\hat{e}D \rightarrow x\hat{e}Gu^*(w) \rightarrow \mu;x=Gu^*)$$
$$\leftrightarrow (Aw)(Ax)(w\hat{e}I \,\&\, x\hat{e}D \rightarrow .\ x\hat{e}Gu^*(w) \leftrightarrow \mu;x=Gu^*)$$

Vi har at de to siste formlene er ekvivalente. For anta wêI & xêD og dessuten at μ;x=Gu*. Siden xê{x} følger det at xêμ;x(w). Men da har vi xêGu*(w).

Resultatene vi har kommet frem til under (A) - (E) kan sammenfattes i det følgende teorem:

Teorem 7.1.3 Anta M=<D,I,V> er en modell for L der V er som tidligere forklart.Da holder følgende for alle wêI:

J1 $\langle M,w\rangle \models A1 \leftrightarrow$
$(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow (Af)(f\hat{e}E1 \rightarrow (f\hat{e}Psv^*(w) \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow f\hat{e}Psv^*(w)))))$

J2 $\langle M,w\rangle \models A2 \leftrightarrow$

© Morten Harboe Rognes

(Aw)(wêI →(Af)(Ag)(f,gêE;1 & f=>g & fêPsv*(w) → gêPsv*(w)))

J3 <M,w> ⊨ A3 ↔ (Aw)(wêI → (Af)(fêE;1 & fêPsv*(w)→ ¬(Neg(f)êPsv*(w)))

J4 <M,w> ⊨ A4 ↔ (Aa)(aêE;1 → aêPsv*(w) v Neg(a)êPsv*(w))

J5 <M,w> ⊨ A5 ↔ (AX)(XêE;2 & X => Psv* &Const(X) &
(Aw)(wêI → X(w)≠ø) → (Aw)(wêI → SNe(X(w))êPsv*(w)))

J6 <M,w> ⊨ A6 ↔ Ne*=V

J7 <M,w> ⊨ A7 ↔ (Aw)(wêI → VêPsv*(w))

J8 <M,w> ⊨ A8 ↔ Gu* = Mg(<w,Sn(Mg(a(w): aêPsv*(w)))>: wêI)

J9 <M,w> ⊨ A9 ↔ (Aw)(Ax)(wêI & xêD →. xêGu*(w) ↔ μ;x=Gu*)

§7.2 Om ekvivalensen mellom premissene i Smalls første og andre argument.

Det er nærliggende å undersøke sammenhengen mellom premissene i de to argumentene som har blitt presentert av Small. I dette avsnittet skal vi vise at disse to premiss-settene i det vesentlige er ekvivalente såsant vi fjerner premissen A4 fra det andre argumentet. Det er mulig at man kan gi et rent syntaktisk bevis for dette basert på aksiomene og slutningsreglene i S5*. Vi skal imidlertid ikke gjøre dette, men begrense oss til å gi et semantisk argument til fordel for denne ekvivalens. Vi skal vise dette ved å vise at konjunksjonen av høyresidene i H1 - H7 i Teorem 6.0 er ekvivalent med konjunksjonen av høyresidene i ekvivalensene J1- J9 i Teorem 7.1.3, når vi sløyfer J4. For oversiktlighetens skyld gir vi den følgende definisjon:

Definisjon 7.2.1 (a) Vi bruker "H*" som forkortelse for konjunksjonen av de følgende formler:

1. (Aw)(wêI → (Af)(fêE1 → (fêPsv*(w) ↔ (Aw)(wêI →fêPsv*(w)))))
2. (Aw)(wêI →(Af)(Ag)(f,gêE;1 & f=>g & fêPsv*(w) → gêPsv*(w)))
3. (Aw)(wêI → (Af)(fêE;1 & fêPsv*(w)→ ¬(Neg(f)êPsv*(w)))
4. Gu* = G(Psv*)
5. (Aw)(wêI → Gu*êPsv*(w))
6. Ne* = N
7. (Aw)(wêI → NêPsv*(w))

(b) Vi bruker "J*" som forkortelse for konjunksjonen av de følgende setninger

1. (Aw)(wêI → (Af)(fêE1 → (fêPsv*(w) ↔ (Aw)(wêI →fêPsv*(w)))))
2. (Aw)(wêI →(Af)(Ag)(f,gêE;1 & f=>g & fêPsv*(w) → gêPsv*(w)))
3. (Aw)(wêI → (Af)(fêE;1 & fêPsv*(w)→ ¬(Neg(f)êPsv*(w)))
4. (AX)(XêE;2 & X => Psv* &Const(X) &
(Aw)(wêI → X(w)≠ø) → (Aw)(wêI → SNe(X(w))êPsv*(w)))
5. Ne*=V
6. (Aw)(wêI → VêPsv*(w))
7. Gu* = Mg(<w,Sn(Mg(a(w): aêPsv*(w)))>: wêI)
8. (Aw)(Ax)(wêI & xêD →. xêGu*(w) ↔ μ;x=Gu*)

Satsen vi nå skal vise er at H* ↔ J*. Man ser fra Teorem 6.0 at <M,w> ⊨ H ↔ H* og fra Teorem 7.1.3 at <M,w> ⊨ H2- ↔ J*, der H2- står for H2 minus premissen A4. Hvis H*↔ J* følger det at (+) <M,w> ⊨ H ↔ <M,w> ⊨ H2-. Siden vi ovenfor ikke har lagt noen

© Morten Harboe Rognes

spesielle krav på modellen M innebærer dette at vi kan anta (+) holder for alle modeller M. Dette innebærer at H og H2- er semantisk sett ekvivalente. Man kan riktignok ikke gi noe fullstendighetsbevis for S5*, men i lys av et slikt resultat forventer man at det skulle være mulig å konstruere et syntaktisk bevis for H ↔ H2- i kalkylen S5*.

Teorem 7.2.1 Man har: H* ↔ J*

Bevis: **(A)** Vi skal først ta for oss kondisjonalen mot høyre i satsen. Man ser umiddelbart fra definisjonen av H* og F* at det vil være tilstrekkelig for dette formål å vise at H* impliserer den fjerde, syvende og åttende konjunkten i J*. De andre komponentene i J* følger temmelig direkte fra H* eller lett ved hjelp av satser vi har bevist i §6.

(a) Vi viser først (1) (Aw)(Ax)(wêI & xêD →. xêGu*(w) → μ;x=Gu*) følger fra H*. Anta derfor for vilkårlige x,w at (2) wêI & xêD & xêGu*(w). Vi ønsker å vise (+) μ;x=Gu*. Nå er (+) ekvivalent med (Aw)(wêI → μ;x(w) = Gu*(w)). Dette er i sin tur ekvivalent med (3) (Aw)(wêI → {x} = Gu*(w)). Det vil altså være tilstrekkelig å vise at (3) holder. Fra den fjerde konjunkten i H4 har vi (4) Gu* = G(Psv*). Fra dette og den definisjonen som ble gitt av G i §6 følger:

(5) (Aw)(Ax)(xêD &wêI → (xêGu*(w) ↔
(Af)(fêE;1 →.(Aw)(wêI→xêf(w)) ↔ fêPsv*(w))))

Fra (5) følger siden vi har (Aw)(Aw')(w,w'êI → Psv*(w) = Psv*(w')) at (Aw)(Aw')(w,w'êI → Gu*(w) =Gu*(w'). Anta nå at w' er et vilkårlig element i I Fra dette (2) og (6) følge xêGu*(w'). Vi har derfor siden w' var vilkårlig: (Aw)(wêI → xêGu*(w)). Herav (8) (Aw)(wêI → {x} Inkl Gu*(w)). Anta på den annen side at for vilkårlige x,x' og w at (9) x,x'êD & wêI & x,x'êGu*(w). Da følger det ved hjelp av (5) at (10) (Af)(fêE;1 → (Aw)(wêI→xêf(w)) ↔ (Aw)(wêI→x'êf(w))). Siden μ;xêE;1 følger herav (Aw)(wêI→xêμ;x(w)) ↔ (Aw)(wêI→x'êμ;(w)). Siden μ;x(w)={x} for alle wêI kan vi derfor slutte (Aw)(wêI→x'êμ;x(w)) og herav x'=x. Vi har derfor: (Aw)(wêI → (Ax)(Ax')(x,x'êD & x,x'êGu*(w) → x=x')) Fra dette og (8) følger at

(11) (Aw)(wêI → {x}=Gu*(w)) som er det vi ønsker. Dermed har vi vist at (1) holder. Anta nå for vilkårlige x,w at (13) wêI & xêD &μ;x=Gu* Da har vi μ;x(w) = Gu*(w). Siden xêμ;x(w) følger det at xêGu*(w). Vi har derfor ikke bare at (1) holder gitt H*, men også: (Aw)(Ax)(wêI & xêD →. xêGu*(w) ↔ μ;x=Gu*)

(b) Vi skal så vise at H* impliserer:

(1) (AX)(XêE;2 & X => Psv* &Const(X) &
(Aw)(wêI → X(w)≠ø) → (Aw)(wêI → SNe(X(w))êPsv*(w)))

Anta derfor for vilkårlig X at X oppfyller antesedenten i (1), med andre ord at:

(2.1) XêE;2 & X => Psv* &Const(X)
(2.2) (Aw)(wêI → X(w)≠ø)

Fra (2.1) og (2.2) følger: (3) SNe(Psv*(w))=> SNe(X(w)). Dersom vi setter inn Psv* for X i betingelsene C1-C5 i §6 får vi fem påstander som umiddelbart følger fra H*. Det følger at (4) G(Psv*)êPsv*(w) for alle wêI. Nå har man ved hjelp av Teorem 6.6 at:

(5) (Aw)(wêI → (Ex)(G(Psv*)(w) = {x}).

Videre har ved hjelp av Teorem 6.12 at det finnes x0 slik at

(6) x0êD & (Aw)(wêI → Psv*(w) = Mg(a: aêE;1 & μ;x0 =>a)). La nå w være en vilkårlig mulig verden. Fra (4) og (5) følger at det finnes x1 slik at (7) G(Psv*)=μ;x1 & μ;x1êPsv*(w) Fra dette og (6) har vi μ;x1 êMg(a: aêE;1 & μ;x0 =>a)) og derfor at

© Morten Harboe Rognes

μ;x1 => μ;x0. Fra dette følger {x1} Inkl {x0} og derfor at (8) x0=x1. Fra (6) følger at SNe(Psv*(w)) = μ;x0 i lys av Teorem 6.14. Det følger derfor fra (4) - (8) at

(9) SNe(Psv*(w)) = G(Psv*)êPsv*(w). Men fra dette, (3) og den andre konjunkten i H* følger SNe(X(w)) êPsv*(w). Siden w var vilkårlig har vi derfor

(Aw)(wêI → SNe(X(w)) êPsv*(w)). Dette viser at (1) holder.

Vi må også vise at H* impliserer den åttende komponenten i J*. Med andre ord må det vises at: (1) Gu* = Mg(<w,Sn(Mg(a(w): aêPsv*(w)))>: wêI). Det følger fra den fjerde komponenten i H* og definisjonen av G at

(2) (Aw)(Ax)(wêI &xêD → (xêGu*(w) ↔
(Af)(fêE;1→.(Aw)(wêI → xêf(w)) ↔ fêPsv*(w))))

For å vise (1) vil det være tilstrekkelig å bevise:

(+) (Aw)(Ax)(wêI&xêD →. xêG*(w) ↔ (Af)(fêE;1& fêPsv*(w)→xêf(w)).

Det er lett å vise en ene halvedelen av dette. Anta for vilkårlige w og x at (3) wêI & xêD. Anta enn mer at (4) xêGu*(w). Fra dette og (2) følger:

(5) (Af)(fêE;1→.(Aw)(wêI → xêf(w)) ↔ fêPsv*(w))))

Anta nå for vilkårlig f at fêE;1 & fêPsv*(w). Da følger ved hjelp av (5) at (Aw)(wêI →xêf(w)). Fra dette og (3) følger så xêf(w). Siden f var vilkårlig har vi derfor:

(6) (Af)(fêE;1 && fêPsv*(w) → xêf(w)). Men x og w var vilkårlige entiteter slik at (3) og (4) holdt. Det følger at

(7) (Aw)(Ax)(wêI&xêD →. xêG*(w) ↔ (Af)(fêE;1& fêPsv*(w)→xêf(w))

Dette viser at den ene halvedelen i (+) holder gitt H*.

La oss så vise at også den andre halvdelen holder: Fra (2) følger:

(8) (Aw)(wêI → (Ax)(xêGu*(w) ↔ Mg(f: fêE;1&(Aw)(wêI → xêf(w)))= Psv*(w)))

Herav følger så:

(9) (Aw)(wêI → (Ax)(xêGu*(w)
↔ SNe(Mg(f: fêE;1&(Aw)(wêI → xêf(w))))= SNe(Psv*(w))))

Ved hjelp av Teorem 6.13 kan man så slutte:

(10) (Aw)(wêI → (Ax)(xêGu*(w) ↔ μ;x= SNe(Psv*(w)))

Siden H* holder kan vi ved hjelp av Teorem 6.12 slutte at det må finnes x0 slik at:

(11) x0êD & (Aw)(wêI → Psv*(w)= Mg(a: aêE;1 &μ;x0 => a))

Siden I≠ø har vi at det finnes w0 der (12) w0êI. Det følger at

(12) SNe(Psv*(w0)) = SNe(Mg(a: aêE;1 &μ;x0 => a)) = μ;x0

Anta nå at (13) (Af)(fêE;1& fêPsv*(w)→xêf(w)) og (14) wêI &xêD for vilkårlige x og w. Det vil nå være nok å vise xêGu*(w). Siden (15) Psv*(w) = Psv*(w0) fordi Psv* er en konstant egenskap har vi fra (13): (Af)(fêE;1& fêPsv*(w0)→xêf(w)). Det følger at (16) xê(SNe(Psv*(w0)))(w) Fra dette og (12) kan vi slutte xêμ;x0(w) og derfor x=x0. Fra dette (15) og (12) har vi SNe(Psv*(w))=μ;x. Men fra dette sammen med (14) og (10) følger xêGu*(w). Dette viser at også halvedelen mot venstre i (+) holder.

Dermed har vi også vist at H* impliserer J*

(B) Vi skal så vise at J* impliserer H*. For å vise dette ser man fra Definisjon 7.2.1 at det vil være tilstrekkelig å vise at J* impliserer den fjerde og femte komponenten i H*. Alle de andre delene av H* følger direkte fra tilsvarende deler i J*. Vi må altså i første omgang vise at J* impliserer: Gu* = G(Psv*). Ekspanderer vi denne formelen ved hjelp av definisjonen vi har gitt av G og g;w(X), ser man at det er nødvendig å bevise:

(+) (Aw)(Ax)(wêI &xêD → (xêGu*(w) ↔
(Af)(fêE;1→.(Aw)(wêI → xêf(w)) ↔ fêPsv*(w))))

© Morten Harboe Rognes

Fra den syvende konjunkten i J* har vi:

(1) (Aw)(wêI → Gu*(w) = Sn(Mg(a(w): aêPsv*(w)))

Vi har at Psv*(w1) = Psv*(w2) for alle w1,w2êI siden Psv* er et konstant attributt. Nå har vi at I≠ø. Det finnes derfor w0 slik at (2) w0êI. Det følger at for alle wêI har vi Psv*(w)= Psv*(w0). Fra disse forhold og (1) følger videre:

(2) (Aw)(wêI → Gu*(w) = Sn(Mg(a(w): aêPsv*(w;0))) og derfor

(3) Gu* = SNe(Psv*(w0))

Fra dette og den siste komponenten i J* følger:

(4) (Aw)(Ax)(wêI & xêD → (xêGu*(w) ↔ μ;x= SNe(Psv*(w0)))

Vi skal nå vise at (+) ovenfor holder.

(I) Vi tar først for oss halvdelen mot høyre. Anta for vilkårlige x,w at

(5) wêI &xêD. Anta videre at (6) xêGu*(w). Vi skal vise:

(7) (Af)(fêE;1 → ((Aw)(wêI → xêf(w)) ↔ fêPsv*(w)))

(a) Anta (8) fêE;1 & (Aw)(wêI → xêf(w)). Fra dette følger μ;x => f. Fra (5),(6) og (4) følger: (9) μ;x = SNe(Psv*(w0)). Vi har derfor: (10) SNe(Psv*(w0)) => f. Siden Psv* åpenbart er et konstant attributt som impliserer seg selv og som har en ikke-tom ekstensjon i hver verden, dette følger fra den første, fjerde og sjette komponenten i J* har vi (11) SNe(Psv*(w0))êPsv*(w0). Fra dette og (10) følger ved hjelp av den andre konjunkten i J* at fêPsv*(w0) og derfor, siden wêI og Psv* er en konstant egenskap, at fêPsv*(w). Dette viser at den ene halvedelen av (7) holder.

(b) Anta på den annen side for vilkårlig f at (12) fêPsv*(w) & fêE;1. Da har vi:

(13) SNe(Psv*(w0) =>f. For er x',w' vilkårlige objekter slik at x'êSNe(Psv*(w0))(w') følger (Af)(fêPsv*(w0) → x'êf(w')). Siden fêPsv*(w), etter (12) og Psv* er konstant har vi fêPsv*(w0) og derfor x'êf(w'). Dette viser at (13) holder. Fra (6),(4) og (5) har vi μ;x = SNe(Psv*(w0)). Fra dette og (13) følger μ;x =>f og derfor (Aw)(wêI → xêf(w)). Dermed har vi vist at (7) holder.

(II) Vi skal så vise halvdelen mot venstre i (+). Anta for vilkårlige x,w at

(14) xêD &wêI og anta dessuten at

(15) (Af)(fêE;1 → ((Aw)(wêI → xêf(w)) ↔ fêPsv*(w)))

Vi skal vise at xêGu*(w). Fra (15) følger Mg(f:fêE;1& (Aw)(wêI →xêf(x)))= Psv*(w). Fra dette følger så: SNe(Mg(f:fêE;1& (Aw)(wêI →xêf(x)))) = SNe(Psv*(w)). men ved hjelp av Teorem 6.13 har vi SNe(Mg(f:fêE;1& (Aw)(wêI →xêf(x)))) =μ;x. Vi må derfor ha: (16) μ;x = SNe(Psv*(w)). Siden Psv* er en konstant egenskap og w0êI følger da μ;x = SNe(Psv*(w0)). Fra dette , (14) og (4) følger så xêGu*(w). Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for at J* impliserer den fjerde komponenten i H*.

Vi må imidlertid også bevise at J* impliserer den femte komponenten i H*, dvs. impliserer (Aw)(wêI → Gu*êPsv*(w)). Fra den syvende konjunkten i J* har man

Gu* = Mg(<w,Sn(Mg(a(w): aêPsv*(w)))>: wêI). Herav følger siden Psv* er et konstant attributt Gu*= SNe(Psv*(w0)) for en eller annen w0êI. Men siden vi har Psv* =>Psv* & Const (Psv*) & (Aw)(wêI → Psv*(w)≠ø) følger ved hjelp den fjerde konjunkten i J* at (Aw)(wêI → Gu*êPsv*(w)).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§8 Ytterligere undersøkelser av det andre argumentet til Small.

Det andre argumentet til Small er, slik det fremgår av undersøkelsen i den forrige paragraf, i det vesentlige ekvivalent med det første argumentet om vi sløfer premissen A4 som semantisk

© Morten Harboe Rognes

sett innebærer at dersom f er en egenskap så er enten f selv eller negasjonen av en positiv egenskap. Det vis kal vise i dette avsnittet er at dette er en antagelse som er svært sterk og som mildt sagt har uønskede konsekvenser.

Vi starter med en definisjon og definerer hva som skal forstås med en fullstendig mengde med egenskaper.

Definisjon 8.1 Anta X er en ikke-tom mengde inkludert i E;1. Vi kalle da X for en fullstendig mengde med attributter av første orden, i symboler "Comp(X)", hvis og bare hvis X oppfyller de følgende krav:

(i) X Inkl E;1 & X≠ø
(ii) (Af)(fêE;1 → fêX v Neg(f)êX)
(iii) (AY)(Y Inkl X & Y≠ø → SNe(Y)êX)
(iv) (Af)(Ag)(f,gêE;1 & fêX & f=> g → gêX)
(v) (Af)(fêE;1 → ¬(fêX & Neg(f)êX))

Sammenligner man kravene i denne definisjonen med forutsetningene i Teorem 6.1 ser man at betingelsene (ii) og (iii) ikke er blandt forutsetningene i denne satsen. Kravet (ii) ovenfor er et slags fullstendighetskrav. Man vil i det følgende innse at dette er et meget sterkt krav. Kravet (iii) kunne man kalle et konjunksjonskrav. Det innebærer at dersom Y er en ikke-tom mengde av attributter som er inkludert i X så er snittet av attributtene i Y med i X. Her er kravet tatt med i sin sterke form. Det impliserer selvfølgelig at konjunksjonen av to attributter f,g som er med i X også er med i X.

Det er på ingen måte helt opplagt at det finnes fullstendige ikke-tomme delmengder av E;1. Våre neste teoremer viser imidlertid (a) at dette faktisk er tilfelle, (b) hvordan man kan konstruere fullstendige attributtmengder og (c) at det er mulig å gi en ganske opplysende karakteristikk av dem.

Før vi går videre vil vi relatere kravene i definisjonen ovenfor til de fem første premissene i det andre argumentet til Small. Vi har at Psv* er en konstant egenskap ved egenskaper. Er derfor w en eller annen mulig verden vil Psv*(w) være en mengde av egenskaper. Sett X= Psv*(w). Fra de fire første konjunktene i setningen J* som vi definerte i forrige paragraf følger det da at X er en fullstendig egenskapsmengde. Kort sagt, mengden av de positive egenskaper er i følge J* en slik mengde med egenskaper. Fra J* fremgår det også at egenskapen å være et guddommelig vesen er identisk med egenskapen å være et vesen som har den egenskapen som er snittet av alle de positive egenskaper. I det følgende skal vi vise at dette snittet er en ganske spesiell egenskap. Det dreier seg om en egenskap som har en tom ekstensjon i alle verdener untatt nøyaktig en og i denne ene verden er ekstensjonen en enhetsmengde. Skal et guddommelig vesen derfor være noe som eksisterer i alle mulige verdener følger det at det bare kan finnes en mulig verden. Det er neppe noen modallogikere som kan ta en slik konsekvens alvorlig. Det andre argumentet til Small har derfor samlet sett altfor sterke premisser.

La oss imidlertid ta en ting om gangen. Vi viser først at det finnes fullstendige egenskapsmengder. Er x et individ og w en mulig verden er faktisk mengden av alle de egenskaper av første orden f der xêf(w) en slik mengde. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 8.1 Anta xêD og w0êI. Definer X ved: X= Mg(f: fêE;1 & xêf(w0)). Da har man at Comp(X)

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi skal vise at X oppfyller kravene (i) – (v) i

© Morten Harboe Rognes

Definisjon 8.1.

(a) Vi har åpenbart på basis av definisjonen av X i satsen at X Inkl E;1. Det skulle også være klart at μ;x êX. Derfor har vi X≠ø. Dette viser at X oppfyller kravet (i).

(b) Anta (1) fêE;1 og ¬(fêX) for vilkårlig f. Fra (1) og definisjonen av X som er gitt i satsen følger ¬(xêf(w0)). Siden xêD har vi da xê(D – f(w0)) = Neg(f)(w0). Men fra dette og definisjonen av X følger Neg(f)êX. Dette viser at X oppfyller kravet (ii).

(c) Anta Y er en ikke-tom-delmengde av X, dvs. at (1) Y Inkl X & Y≠ø. Da har vi ved hjelp av definisjonen av SNe at (2) SNe(Y)(w0) = SN(Mg(f(w0): fêY)). Anta fêY for vilkårlig f. Fra dette og (1) følger fêX og dermed at xêf(w0). Vi har derfor (Af)(fêY → xêf(w0)). Fra dette og (2) følger xêSNe(Y)(w0) og derfor at SNe(Y)êX. Dette viser at X oppfyller kravet (iii) i Definisjon 8.1.

(d) Anta (1) f,gêE;1 & fêX. Anta f=>g, dvs. at (2) (Aw)(wêI → f(w) Inkl g(w)). Siden fêX følger at xêf(w0). Fra dette og (2) følger xêg(w0) og derfor siden gêE;1 at gêX. Dette viser at X oppfyller kravet (iv) i Definisjon 8.1.

(e) Anta for reduktio ad absurdum at fêX & Neg(f)êX. Da har vi ved hjelp av definisjonen av X at (1) xêf(w0) og (2) xêNeg(f)(w0). Det siste impliserer xê(D - f(w0)) og derfor at ¬(xêf(w0)). Dette strider mot (1). Det følger at X oppfyller krav (v) i Definisjon 8.1. **QED**.

Den følgende sats viser at dersom X er en fullstendig egenskapsmengde finnes det en xêD og en verden w slik at X er mengden av alle de egenskaper f der vi har at x er med i ekstensjonen til f i verdenen w. I en viss forstand kan dette oppfattes som "omvendingen" av den forrige satsen.

Teorem 8.2 Anta Comp(X) og at D inneholder minst to elementer. Da finnes det xêD of w0êI slik at X = Mg(f: fêE;1 & xêf(w0))

Bevis: Anta (1) Comp(X). Definer for alle aêD og wêI funksjonen ξ ved

(2) ξ(a,w) = (if)(Func(f) & Dom(f)= I &
(Aw')(w'êI & w'≠w → f(w')=ø) & f(w)={a})

ξ(a,w) er altså den egenskapen hvis ekstensjon i verdenen w er {a} og hvis ekstensjon i alle andre verdener er den tomme mengden. Man ser lett at man har følgende på basis av (2):

(3) (Aa)(Aw)(aêD & wêI → ξ(a,w)êE;1)

Anta nå for reduktio ad absurdum (+) (Aa)(Aw)(aêD & wêI → ¬(ξ(a,w)êX)). Fra (1) og definisjonen av Comp(X) kan man slutte (Af)(fêE;1 & ¬(fêX) → Neg(f)êX). Dette og (+) impliserer (4) (Aa)(Aw)(aêD & wêI → Neg(ξ(a,w))êX). Definer nå mengden Q ved å sette: (5) Q = Mg(Neg(ξ(a,w)): aêD & wêI). Fra (4) og (5) følger: (6) Q Inkl X. Siden D≠ø og I≠ø følger (7) Q≠ø. Ved hjelp av definisjonen av Comp(X) følger fra (6) og (7) at (8) SNe(Q)êX. Anta wêI for vilkårlig w. Da har vi

(9) SNe(Q)(w) = SN(Mg(g(w): gêQ)). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes noe x0 slik at (10) x0êSN(Mg(g(w): gêQ)). Herav følger: (11) (Ag)(gêQ → x0êg(w)). Men vi har Neg(ξ(x0,w))êQ. Da i lys av (2): x0êNeg(ξ(x0,w))(w) = D- ξ(x0,w)(w) = D-{x0}

Dette er umulig. Det følger at SNe(Q)(w) =ø). Siden w var vilkårlig har vi:

(12) (Aw)(wêI → SNe(Q)(w)=ø). Men fra (12) følger:

(13) SNe(Q) Inkl Neg(SNe(Q)) fordi vi har:

(14) (Aw)(wêI → SNe(Q)(w) =ø Inkl (D-ø) = (Neg(SNe(Q)))(w)).

Men siden SNe(Q)êX har vi da at også Neg(SNe(Q))êX i lys av kravet (v) i Definisjon 8.1.

© Morten Harboe Rognes

Dette er umulig. Det følger at (+) ovenfor er gal. Vi har derfor at det finnes a0 og w0 der:
(15) a0êD & w0êD & ξ(a0,w0)êX.
Sett nå per definisjon (16) X' = Mg(f: fêE;1 & a0êf(w0)). Vi skal vise at
(17) (Af)(fêX' → fêX). ie X' Inkl X. Anta (18) fêX'. da har vi ved hjelp av (16) at
(19) a0êf(w0). Vi skal vise at (20) ξ(a0,w0) => f. Anta for vilkårlig w at wêI. Er w≠w0 har vi at ξ(a0,w0)(w) = ø Inkl f(w). Er w=w0 har vi ξ(a0,w0)(w) = {a0} Inkl f(w0)=f(w) i lys av (19). Dette viser at (20) holder. Siden Comp(X) har vi fra (15), (20) og det at fêE;1 at fêX. Dermed har vi vist at (17) holder. Anta for reduktio at (21) fêX & ¬(fêX'). Siden vi har Comp(X') i lys av Teorem 8.1 følger da Neg(f)êX'. men fra dette og (17) følger Neg(f)êX. Da har vi fêX og Neg(f)êX som er utelukket siden det forutsettes at Comp(X). Det følger at X'=X.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det forrige teoremet viste at dersom X var en fullstendig egenskaps mengde fantes det et individ-muligverden par <x,w> slik at X var mengden av alle de egenskaper f av første orden som oppfylte kravet xêf(w). Den følgende sats viser at gitt X er dette paret entydig bestemt.

Teorem 8.3 Anta Comp(X). Da finnes det ett og bare ett par <a,w>ê DxI slik at
X = Mg(f: fêE;1 & xêf(w))

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at (1) <a1,w1>, <a2,w2>êDxI, videre at
(2) <a1,w1> ≠<a2,w2> og (3) Mg(f: fêE;1 & a1êf(w1)) = Mg(f: fêE;1 & a2êf(w2)) for visse objekter a1,a2, w1 og w2. Fra (3) følger:
(4) (Af)(fêE;1 → (a1êf(w1) ↔ a2êf(w2)))
Vi definerer ξ på samme måte som i forrige bevis. Da har vi at ξ(a1,w1)êE;1 og a1ê ξ(a1,w1)(w1)={a1}. Fra dette og (4) følger (5) a2êξ(a1,w1)(w2). Er w2=w1 har vi da a2ê{a1} og derfor a1=a2. Dette strider mot (2). Har vi på den annen side w2≠w1 har vi ξ(a1,w1)(w2)=ø som i lys av (5) er umulig. Det følger at dersom (3) og (1) holder må vi ha at <a1,w1> = <a2,w2> . Dette viser at satsen holder. **QED**.

Den neste satsen viser dersom X er en fullstendig egenskapsmengde vil den egenskapen som er snittet av alle egenskapene i mengden være ganske spesiell. Det vil finnes nøyaktig et element <x,w>êDxI der vi har at SNe(X)= {x}.

Teorem 8.4 Anta X Inkl E;1 & Comp(X). Da har man at følgende holder:
(E!x)(E!w)(xêD & wêI & SNe(X)(w) = {x})

Bevis: Anta X Inkl E;1 & Comp(X). Da har vi ifølge Teorem 8.2 og 8.3 at det finnes entydig bestemte x og w0 der w0êI & xêD slik at X = Mg(f: fêE;1 & xêf(w0)). Da har vi:
(1) SNe(X)(w0) = Mg(y: (Af)(fêE;1 & xêf(w0) → yêf(w0))). Det er åpenbart at xêSNe(X)(w0) siden man har: (Af)(fêE;1 & xêf(w0) → xêf(w0)). Anta på den annen side for vilkårlig y at yêSNe(X)(w0). Fra (1) følger da (Af)(fêE;1 & xêf(w0) → yêf(w0)). Siden ξ(x,w0)êE;1 og xêξ(x,w0)(w0) følger yêξ(x,w0)(w0) = {x}. Herav y=x. Dette viser at SNe(X)(w0) = {x}. **QED**.

Det finnes visse rent mengdeteoretiske varianter av teoremene ovenfor. La D være en vilkårlig ikke-tom mengde. I det følgende holder vi alt som har med mulige verdener å gjøre utenfor. Det følgende er en rent mengdeteoretisk definisjon:

© Morten Harboe Rognes

Definisjon 8.2 Anta D er en ikke-tom mengde og X Inkl Pt(D). Da kalles X for komplett hvis og bare hvis :

(i) (Aa)(aêPt(D) → aêX v (-a)êX)
(ii) (Ay)(ø≠y Inkl X → Ω(y)êX)
(iii) (Ax)(Ay)(x,yêPt(D) → xêX & x Inkl y → yêX)
(iv) (Ax)(xêPt(D) → ¬(xêX & (-x)êX))

Det man nå kan vise, og som svarer til konjunksjonen av Teorem 8.1 - Teorem 8.3 ovenfor er:

Teorem 8.5: Anta D er en ikke-tom mengde og X Inkl Pt(D). Da har man:
(a) Anta xêD & X= Mg(y: yêPt(D) & {x} Inkl y). Da har man at X er en komplett mengde.
(b) Anta X er en komplett mengde. Da finnes ett og bare ett element xêD slik at
X= Mg(y: yêPt(D) & {x} Inkl y)
(c) Anta X er en komplett mengde. Da har man at det finnes et entydig bestemt element xêD slik at: SN(X) = {x}

Man ser fra denne satsen at de komplette mengdene av mengder over D kan bringes i en-entydig korrespondanse med de diverse enhetsmengdene {x} ettersom x gjennomløper D.

En tilsvarende sats kan bevises om vi begrenser oss til konstante attributter, dvs. de egenskaper som i alle verdener alltid har den samme ekstensjon. Vi hopper over beviset for Teorem 8.5 siden det ikke gir en noen vesentlig ny informasjon.

Teorem 8.4 kan skjerpes noe. Egenskapen ξ(x,w) er som vi har sett den egenskapen hvor ekstensjonen i verdenen w er {x}, og hvor ekstensjonen i enhver verden som er forskjellig fra w, er identisk med den tomme mengden. Man har da, noe man lett innser, at dersom ξ(x1,w1) = ξ(x2,w2) må x1=x2 og w1=w2. Det man nå kan vise er at dersom X er en fullstendig egenskapsmengde så er snittet av X identisk med ξ(x,w) for et eller annet par <x,w>êDxI. Det vil også være slik at dette paret er entydig bestemt. Dette forhold er innholdet i den følgende sats:

Teorem 8.6 Anta X Inkl E;1 & Comp(X). Da har man at det finnes xêD & wêI slik at
SNe(X) = ξ(x,w)

Bevis: Anta X Inkl E;1 & Comp(X). Da har man ved hjelp av Teorem 8.2 at det finnes xêD og wêI slik at (1) X= Mg(f: fêE;1 & xêf(w)). Vi skal vise at (2) SNe(X)= ξ(x,w). Dette innebærer at vi må vise: (+) (Aw')(w'êI → SNe(X)(w') = ξ(x,w)(w')).
Anta derfor for vilkårlig w' at (3) w'êI. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): w'=w. Vi skal vise SNe(X)(w') = ξ(x,w)(w')). La oss først ta inklusjonen mot høyre. Anta derfor for vilkårlig y at (4) yê SNe(X)(w'). Ved hjelp av definisjonen av SNe følger fra (4) (Af)(fêX → yêf(w')). Fra dette og (1) kan man så slutte:

(5) (Af)(fêE;1 & xêf(w) → yêf(w')). Vi har ξ(x,w)êE;1 & xêξ(x,w). Fra dette og (5) følger at yêξ(x,w)(w'). Dette viser at (5.1) SNe(X)(w') Inkl ξ(x,w)(w')) siden y var vilkårlig. Anta nå at y er et eller annet vilkårlig objekt som er med i ξ(x,w)(w'), ie. at (6) yêξ(x,w)(w'). Siden vi ønsker å vise at yêSNe(X)(w'), anta for vilkårlig f at (7) fêE;1 & xêf(w). Fra (6) og det forhold at w=w' følger yêξ(x,w)(w') = ξ(x,w)(w)= {x}. Herav har vi at y=x og derfor ved hjelp av (7) yêf(w') fordi vi i dette tilfelle har w=w'. Vi har derfor (Af)(fêE;1& xêf(w) → yêf(w')) og derfor yêSNe(X)(w'). Det følger at ξ(x,w)(w') Inkl SNe(X)

© Morten Harboe Rognes

(w'). Dette sammen med (5.1) impliserer SNe(X)(w') = ξ(x,w)(w') i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): w'≠w. Da har vi per definisjon ξ(x,w)(w')=ø. I dette tilfelle vil det åpenbart finnes to egenskaper f1, f2êE;1 der

(8.1) f1(w)={x} & f1(w')=ø

(8.2) f2(w)={x} & f2(w')=D

I så fall har vi åpenbart at f1,f2êX siden f1,f2êE;1 & xêf1(w) & xêf2(w). Men det skulle også være klart at SNe(X)(w') =ø. Det følger derfor at SNe(X)(w')=ξ(x,w)(w') også i dette tilfellet.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (+). Dette avslutter beviset for satsen. **QED**.

Den følgende sats er svært viktig når det gjelder analysen av det andre argumentet Small presenterer. Satsen uttrykker at dersom X er en fullstendig egenskapsmengde og det finnes et individ slik at SNe(X) =μ;x så finnes det nøyaktig en og bare en mulig verden.

Teorem 8.7 Anta X Inkl E;1 & Comp(X). Anta videre at (Ex)(xêD & SNe(X) = μ;x). Da har man at Cd(I) = 1

Bevis: Anta (1) X Inkl E;1 & Comp(X). Anta videre at det finnes x slik at (2) xêD og (3) SNe(X) = μ;x. Fra (3) følger: (4) (Aw)(wêI → SNe(X)(w)= μ;x(w)). Nå har vi i kraft av definisjonen av μ;x at (5) (Aw)(wêI → μ;x(w) = {x}). Fra (4) og (5) følger: (6) (Aw)(wêI → SNe(X)(w) = {x}) Fra Teorem 8.4 følger det at det finnes et entydig bestemt par <a0,w0>êDxI slik at SNe(X)(w0)={a0}. Dette impliserer:

(7.1) SNe(X)(w0) = {a0}

(7.2) (Aw)(Ax)(wêI & xêD & SNe(X)(w) ={x}→ w=w0 & x=a0)

Anta for vilkårlig w at (8) wêI. Da har vi fra (2) og (6) at xêD & SNe(X)(w) ={x}. Fra dette, (7.2) og (8) kan vi slutte at w=w0. Siden w var vilkårlig har vi at

(Aw)(wêI → w=w0). Siden w0êI følger et at I = {w0}. Med andre har vi at Cd(I) = 1. **QED**.

La oss nå se på konsekvensene av satsen ovenfor for Smalls argument når man tar med det som vi ovenfor kalte fullstendighetspremissen. Vi har faktisk at det følgende holder:

Teorem 8.8 Anta (Aa)(aêE;1 → aêPsv*(w) v Neg(a)êPsv*(w)) og at J* holder. Da har man at I bare inneholder ett element.

Bevis: Vi har at J* impliserer H* og at H* i sin tur impliserer (1) (Aw)(wêI → (Ex)(xêGu*(w)). Sin I er forskjellig fra nullmengden finnes det w0 slik at (2) w0êI. Fra dette og (1) kan man så slutte at det finnes x der vi har: (3) xêGu*(w0). Fra forutsetningene følger enn mer, som vi har vist ovenfor, at (4) Comp(Psv*(w0)). Nå følger fra den nest siste konjunkten i J* at (5) Gu* = SNe(Psv*(w0)). Den siste komponenten i J* er:
(6) (Aw)(Ax)(wêI & xêD →. xêGu*(w) ↔ μ;x=Gu*). Fra dette (3) og (5) har vi:
(7) SNe(Psv*(w)) = μ;x. Men fra dette, (5) og Teorem 8.7 følger: Cd(I)=1, med andre ord at det bare finnes en eneste mulig verden. **QED**.

At det bare skulle finnes en eneste mulig verden er naturligvis uakseptabelt. Man ser imidlertid fra det vi har skrevet ovenfor at dette følger om man legger til (Aa)(aêE;1 → aêPsv*(w) v Neg(a)êPsv*(w)) som en premiss i Smalls andre argument. Sløyfer man denne premissen blir argumentet til Small i det vesentlige ekvivalent med det første som Small presenterer. Men dette siste argumentet representerer likevel ikke noen

© Morten Harboe Rognes

direkte forbedring. Som vi påpekte i §6.1 er premissen om at mengden av de positive egenskaper er lukket under implikasjon tvilsom. Man kan også gjenta de andre motargumentene som ble fremsatt i den i denne paragraf.

§9 Avslutning

Å argumentere for Guds eksistens, eller den sterkere påstanden om at Gud eksisterer med nødvendighet, kan fortone seg som en ytterst problematisk affære. Saken forholder seg delvis således: Har man for seg et logisk gyldig argument som alle rimelig fornufige mennesker innser at er gyldig, men hvor svært mange anser konklusjonen for uholdbar, kan man ikke regne med at det vil være noen enighet om premissene i argumentet. Svært mange vil oppfatte premissene samlet sett som uholdbare. Og selv blandt dem som akepterer konklusjonen kan det være noen som ikke akepterer premissene. En sann påstand kan som bekjent utledes fra påstander som ingen aksepterer.

De argumentene som for Guds eksistens som har blitt undersøkt danner ikke noe unntak fra denne regel. De er, som det ettertrykkelig har blitt vist, gyldige. Dette er det neppe noen grunn til å betvile, om man da ikke vil betvile den logikken som ligger til grunn, systemet S5*. Men det er vanskelig å skjønne hva poenget skulle være med det.

Siden argumentene er gyldige, og mange trolig vil forkaste konklusjonen som er at det finnes et entydig bestemt guddommelig vesen, må man regne med at mange vil betvile premissene. Det mest nærliggende er da å betvile de premissene som karakteriserer mengden av positive egenskaper. At det ikke både kan være slik at en egenskap og negasjonen av denne egenskap begge skulle være positive kan kanskje fortone seg plausibelt, men dette er, som vi har argumentert for i §6, ikke noen opplagt sak. At mengden av positive egenskaper skulle være lukket under implikasjon virker ytterst suspekt. Igjen nevnte vi flere grunner i §6. Vi har uttrykt oss forsiktig, men det er mulig at man kan avvise denne påstand på en langt bryskere måte enn vi har gjort. At det vi har kalt den universelle egenskapen skulle være en ubetinget positiv egenskap er også en mildt sagt eiendommelig påstand. Det er ikke lett å se noen gode grunner for hvorfor man skulle insistere på at dette var tilfelle. Endelig kan man også rette innvendinger mot den gudsdefinisjonen som man trekker inn som en premiss i begge argumentene, men på dette punkt er det kanskje rimelig å være noe forsiktigere. At Gud skulle være et objekt som ikraft av sitt vesen er bærer av alle positive egenskaper, og bare dem, fortoner seg ikke som en direkte uplausibel tanke for den som stiller seg velvillig når det gjelder Guds eksistens. Den vil for eksempel implisere at Gud er allvitende og allmektig om disse to egenskapene regnes som positive. Det er likevel mulig at den utelukker egenskaper ved gud som man tradisjonelt har tenkt seg at dette vesen har. Gud tenkes ofte som skaperen av verdensaltet og som den som kontinuerlig opprettholder verden. Det er kanskje mulig at dette bør regnes som positive egenskaper. I så fall vil de måtte regnes som en del av Guds vesenskjerne. Som man skjønner er det imidlertid rom for diskusjon. Uansett behøver ikke det gudsbegrep det opereres med i beviset nødvendigvis være så fjernt fra mer tradisjonelle gudsbegreper.

Når det gjelder det andre av argumentene må det skilles mellom to versjoner. Fjerner man fullstendighetspremissen for egenskaper, den premiss som sier at for enhver egenskap er enten den selv eller dens negasjon en positiv egenskap, får man et argument som i det vesentlige er ekvivalent med det første. Dette bestrebet vi oss på å vise detaljert i §7. I dette tilfellet kan de fleste av de innvendingene som ble rettet mot det første argumentet også rettes mot dette andre. Tar man med premissen om fullstendigheten til de positive egenskapene blandt premissene i det andre argumentet kan man imidlertid vise, slik det ble gjort i §8, at det

© Morten Harboe Rognes

bare finnes én logisk mulig verden, en antagelse som åpenbart gjør skillet mellom sannhet, nødvendig sannhet og tilfeldig sannhet poengløst. Det virker som om de fleste vil betakke seg for en slik konklusjon. Konklusjone blir derfor at de to variantene av det siste argumentet til Small er like lite tvingende som det første.

Det er ingen grunn til å trekke for vidtgående slutninger fra de analyser vi har foretatt. Naturligvis kan man ikke fra det faktum at ett argument, eller et lite antall argumenter, for Guds eksistens ikke er allment akseptable slutte at Gud ikke eksisterer, eller at det ikke er slik at Guds eksistens er nødvendig. Det er heller ikke noe som direkte tvinger et individ som er alvorlig overbevist om Guds eksistens til å basere sin tro på argumenter av den typen vi har studert i dette skrift. En troende behøver derfor ikke å ha noen fornuftig grunn til å oppgi sin tro selvom det er usannsynlig at argumenter av det slag vi har undersøkt er uholdbare eller tvilsomme. Dessuten kan man ikke fra den mulighet at argumentene er uholdbare slutte at det er utelukket at det kan finnes langt mer plausible og sofistikerte argumenter for Guds eksistens. Kort sagt utelukker ikke noe av det vi har skrevet at det kan finnes sterke argumenter for Guds eksistens. På den annen side kan man undres over hvordan virkelig sterke argumenter av dette slag ser ut når man tar i betraktning hvor tilsynelatende motsigelsesfulle og preget av tankekors de mer tradisjonelle gudsoppfatninger er. I en viss forstand virker det malplassert å være hverken optimistisk eller pessimistisk i denne forbindelse. Når det gjelder problemet om Guds eksistens synes det besynderlig å håpe på en løsning av problemet på samme måte som man kan ha et berettiget håp om å løse et vanskelig naturvitenskapelig eller matematisk problem. Tanken om at man om hundre år vil stå nærmere en løsning på dette problem enn det vi gjør nå virker besynderlig.

© Morten Harboe Rognes

Referanser

Oppy [1]	Oppy, G., 2007, *Ontological Arguments,* [URL] Tilgjengelig på: http://plato.stanford.edu/entries/ontological-arguments/, [Sist oppsøkt: 30-01-2009]
Small [1]	Small, C.G., 2009, *Reflections on Gödels Ontological Argument*, [URL] Tilgjengelig på: http://www.stats.uwaterloo.ca/~cgsmall/ Godel.final.revision.PDF [Sist oppsøkt: 16-01-2009]
Small [2]	Small, C.G., 2009, *Kurt Gödels Ontological Argument - Part I*, [URL] Tilgjengelig på: http://www.stats.uwaterloo.ca/~cgsmall/ontology.html [Sist oppsøkt: 16-01-2009]
Small [3]	Small, C.G., 2009, *Kurt Gödels Ontological Argument - Part II*, [URL] Tilgjengelig på: http://www.stats.uwaterloo.ca/~cgsmall/ ontology1.html [Sist oppsøkt: 16-01-2009]
Small [4]	Small, C.G., 2009, *Kurt Gödels Ontological Argument - Part III*, [URL] Tilgjengelig på: http://www.stats.uwaterloo.ca/~cgsmall/ ontology2.html [Sist oppsøkt: 16-01-2009]

© Morten Harboe Rognes